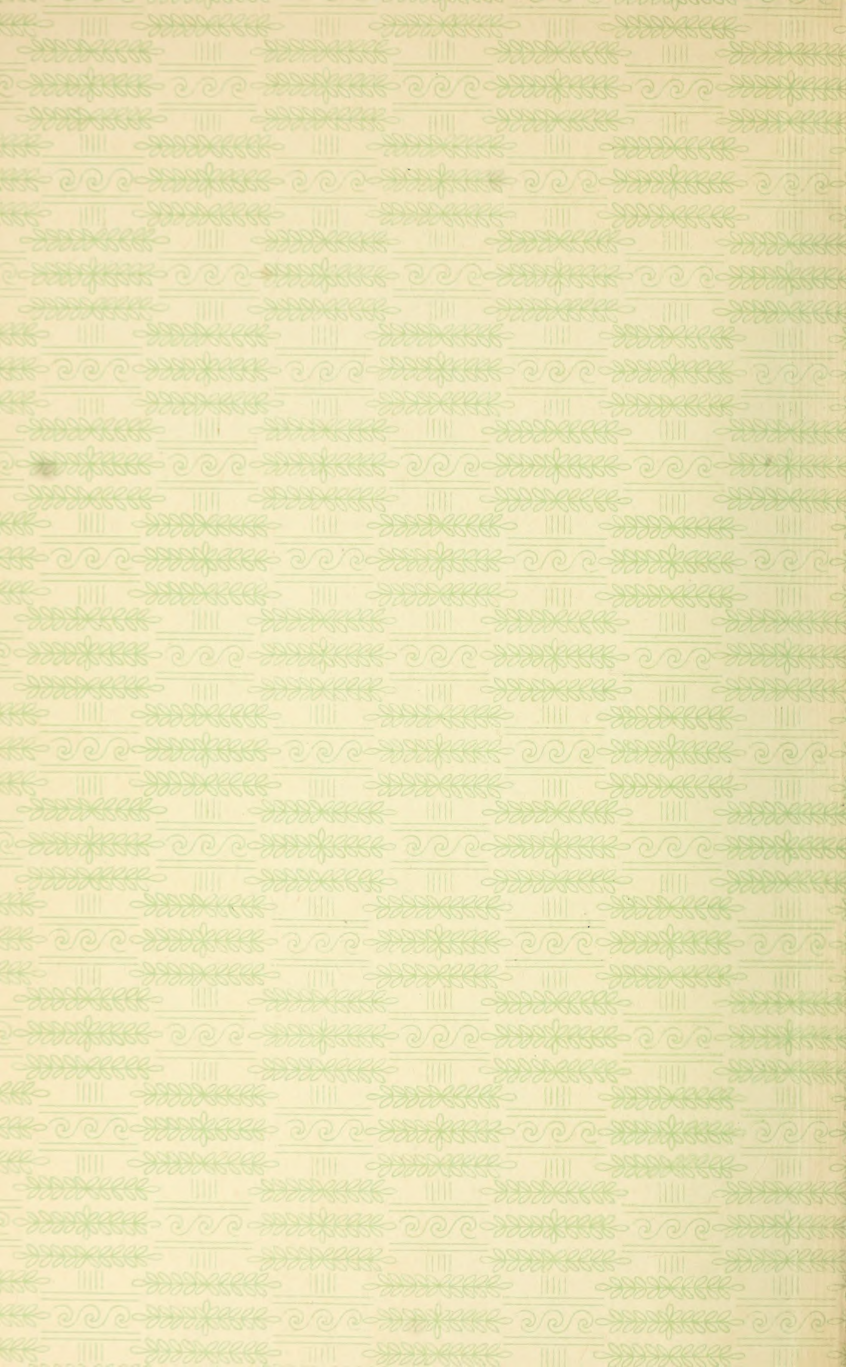
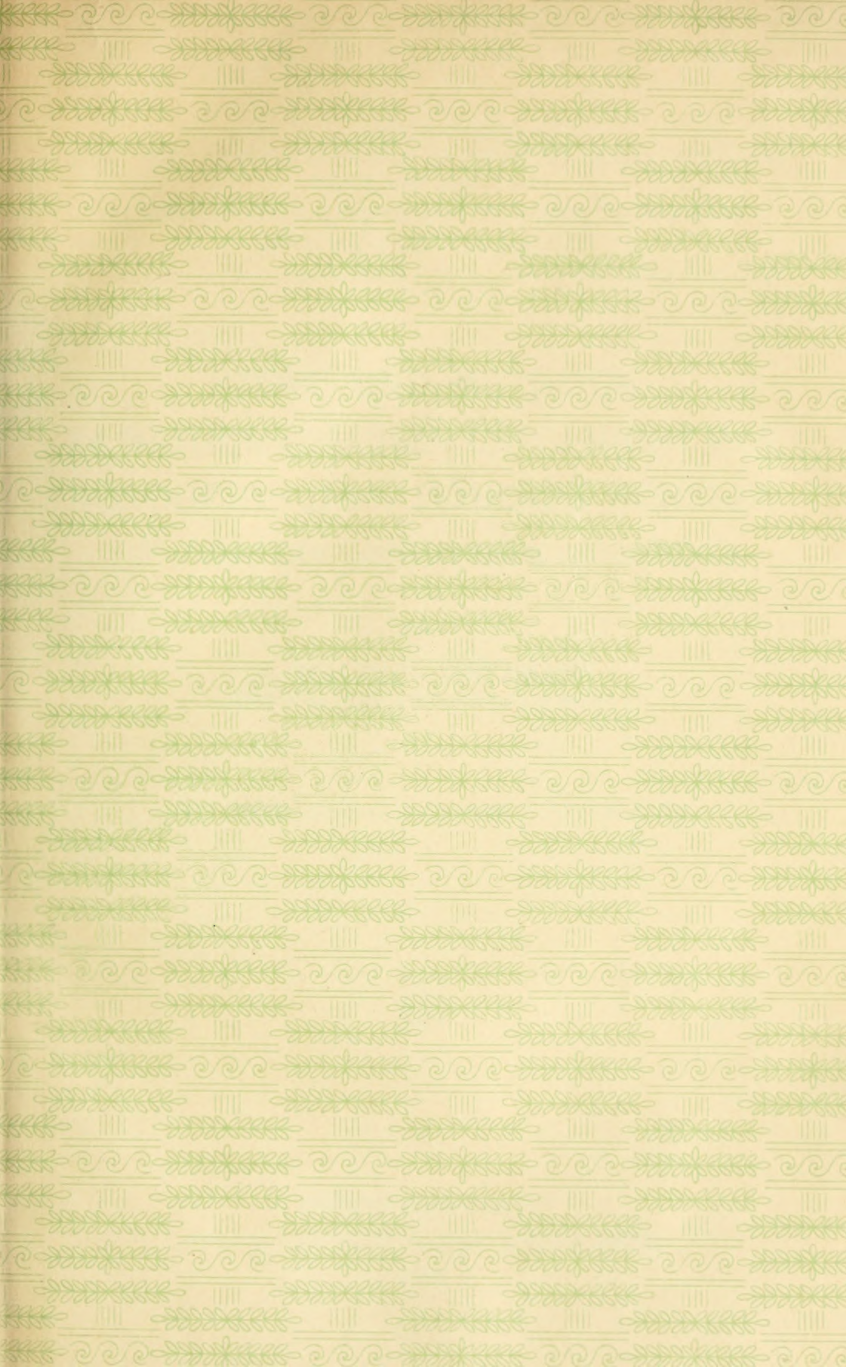
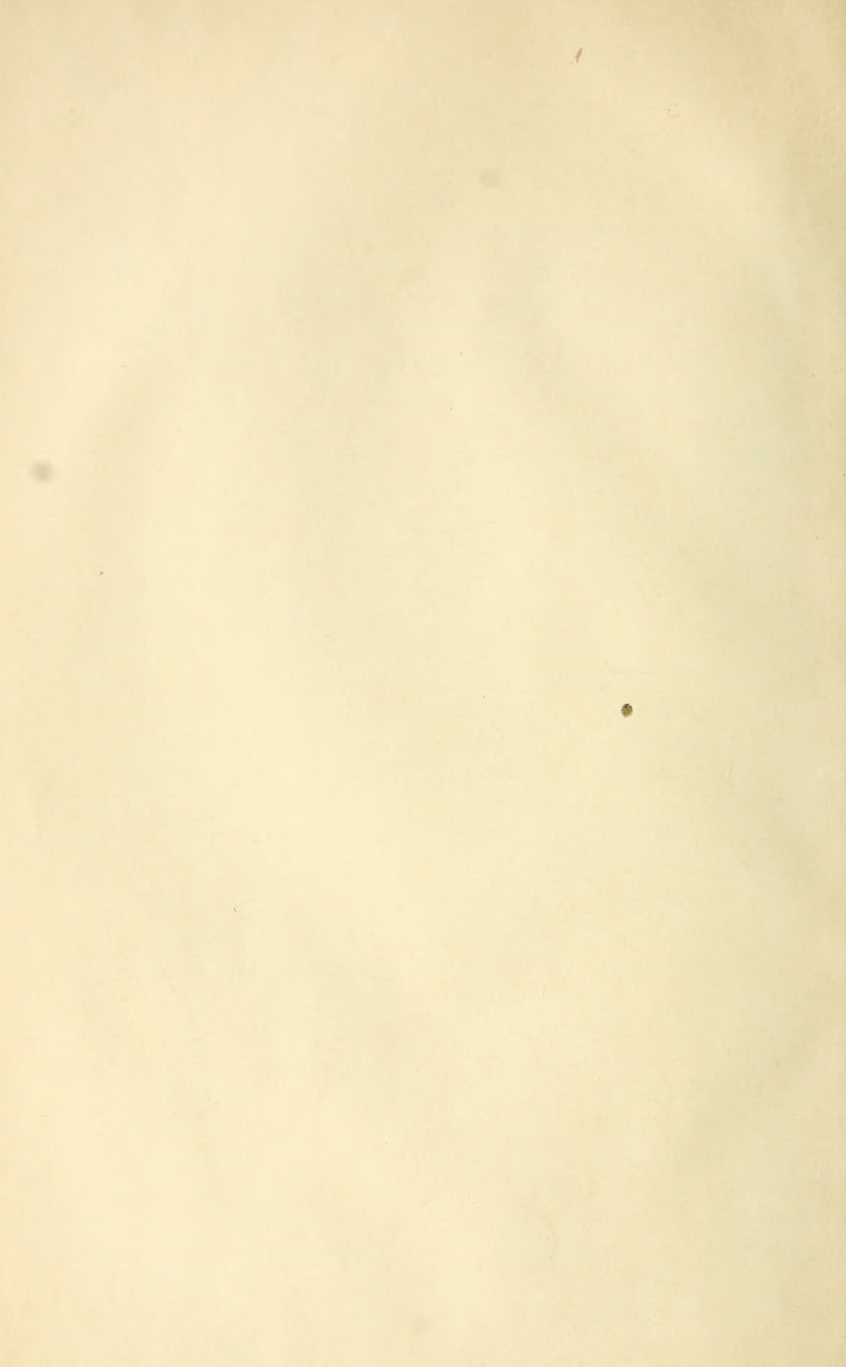






ABHANDLUNGEN
ÜBER DEN MATHEMATISCHEN UNTERRICHT IN DEUTSCHLAND
VERANLASST DURCH DIE
INTERNATIONALE MATHEMATISCHE UNTERRICHTSKOMMISSION
HERAUSGEGEBEN VON **F. KLEIN**
BAND I HEFT 1

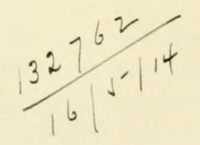
STOFF UND METHODE IM MATHEMATISCHEN UNTERRICHT DER NORDDEUTSCHEN HÖHEREN SCHULEN

AUF GRUND DER VORHANDENEN LEHRBÜCHER

VON

DR. WALTHER LIETZMANN
OBERLEHRER AN DER OBERREALSCHULE IN BARMEN

MIT EINEM EINFÜHRUNGSWORT VON **F. KLEIN**



LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1909

Zur Einführung.

In den beteiligten Kreisen dürfte es hinreichend bekannt sein, daß auf dem IV. Internationalen Mathematiker-Kongreß in Rom, Ostern 1908, die Einsetzung einer Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission (I. M. U. K.) beschlossen wurde, die den Auftrag erhielt, einen vergleichenden Bericht über den Stand des mathematischen Unterrichts in allen Kulturländern auszuarbeiten. Zentralorgan dieser Kommission, deren Vorsitz der Unterzeichnete übernahm, ist die Zeitschrift „L'Enseignement Mathématique", deren Herausgeber, Herr Prof. Fehr in Genf, als Generalsekretär der Kommission fungiert; die Unterkommissionen aber, die in den einzelnen Ländern gebildet wurden, veröffentlichen ihre Vorarbeiten wie auch laufende Mitteilungen über den Stand des Unternehmens in unabhängiger Weise, wie es ihnen gerade zweckmäßig erscheint.

Die Deutsche Unterkommission, deren Mitglieder weiterhin noch besonders genannt werden, hat sich in letzterer Hinsicht ursprünglich darauf beschränkt, in der von Herrn Schotten herausgegebenen Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht eine fortlaufende Rubrik einzurichten: Berichte und Mitteilungen veranlaßt durch die Internationale Mathematische Unterrichtskommission. Diese können auch gesondert bezogen werden. Der Leser findet dort alle Nachrichten über die Organisation der I. M. U. K. und die von ihr in die Hand genommenen Arbeiten; auch kürzere Berichte über einzelne Zweige des mathematischen Unterrichts werden dort veröffentlicht).*

Inzwischen zeigte es sich bald, daß das durch den selbstlosen Eifer zahlreicher Mitarbeiter zusammenkommende wertvolle Material, das alle Gebiete des mathematischen Unterrichts in Deutschland umfaßt, innerhalb dieser Rubrik nur in summarischer, der Wichtigkeit der Sache

---

**) Bislang erschien G. Noodt, Über die Stellung der Mathematik im Lehrplan der höheren Mädchenschule vor und nach der Neuordnung des höheren Mädchenschulwesens in Preußen.*

nicht in vollem Maße gerecht werdender Form Platz finden kann. Es ist aber dringend erwünscht, daß die ausführlichen Darstellungen, die sich als das Ergebnis der weit ausgreifenden Studien unserer Freunde ergeben, dem Publikum unverkürzt vorgelegt werden; können sie doch nur dann die volle Wirkung üben, die wir von ihnen im Interesse der Sache erwarten dürfen. Unter diesen Umständen hat sich die Verlagsbuchhandlung von B. G. Teubner in dankenswerter Weise entschlossen, besagte Darstellungen in einem besonderen Unternehmen, den Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland, veranlaßt durch die Internationale Mathematische Unterrichtskommission, gesondert herauszugeben.

Das erste Heft dieses neuen Unternehmens, das ich hiermit der Öffentlichkeit unterbreite, dürfte geeignet sein, den „Abhandlungen" von vornherein eine große Zahl von Freunden zu werben; war doch das umfangreiche und für jeden Mathematiker zweifellos außerordentlich wichtige Gebiet, das Herr Lietzmann behandelt, bisher mangels geeigneter Führung so gut wie unzugänglich. Es werden weitere Aufsätze folgen, die nicht minder interessant sind, wobei gelegentlich auch die Beziehungen zu benachbarten Disziplinen und die Fäden, die den Unterricht in Deutschland mit dem in andern Ländern verknüpfen, klargelegt werden sollen. Ein allgemeiner Plan unserer Arbeiten wurde bereits in einem Rundschreiben der I. M. U. K., das im Enseignement Mathématique 1909, S. 193 ff. veröffentlicht ist und demnächst in der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht abgedruckt werden wird, bekannt gegeben. Ich komme an dieser Stelle auf die Einzelheiten nicht zurück, um Dinge, die in vollem Flusse sind, nicht vorzeitig festzulegen, vertraue vielmehr, daß das Unternehmen der Abhandlungen, je weitere Kreise es zieht, auch ohne programmatische Einleitung steigende Beachtung im Inlande wie im Auslande bei allen denen finden wird, denen die Entwicklung des mathematischen Unterrichts am Herzen liegt.

Langeoog am 15. August 1909. *F. Klein.*

Die Deutsche Unterkommission der I. M. U. K. besteht auf Grund des von der Deutschen Mathematiker-Vereinigung bei ihrer Kölner Tagung im September 1908 gefaßten Beschlusses z. Z. aus folgenden Mitgliedern:

1. Delegierte:

F. Klein, Geheimer Regierungsrat, Professor an der Universität, Göttingen, Wilhelm Weberstr. 3.

P. Stäckel, Geheimer Hofrat, Professor an der Technischen Hochschule, Karlsruhe i. B., Stefanienstr. 7.

P. Treutlein, Geheimer Hofrat, Direktor der Goetheschule, Karlsruhe i. B., Gartenstr. 5a.

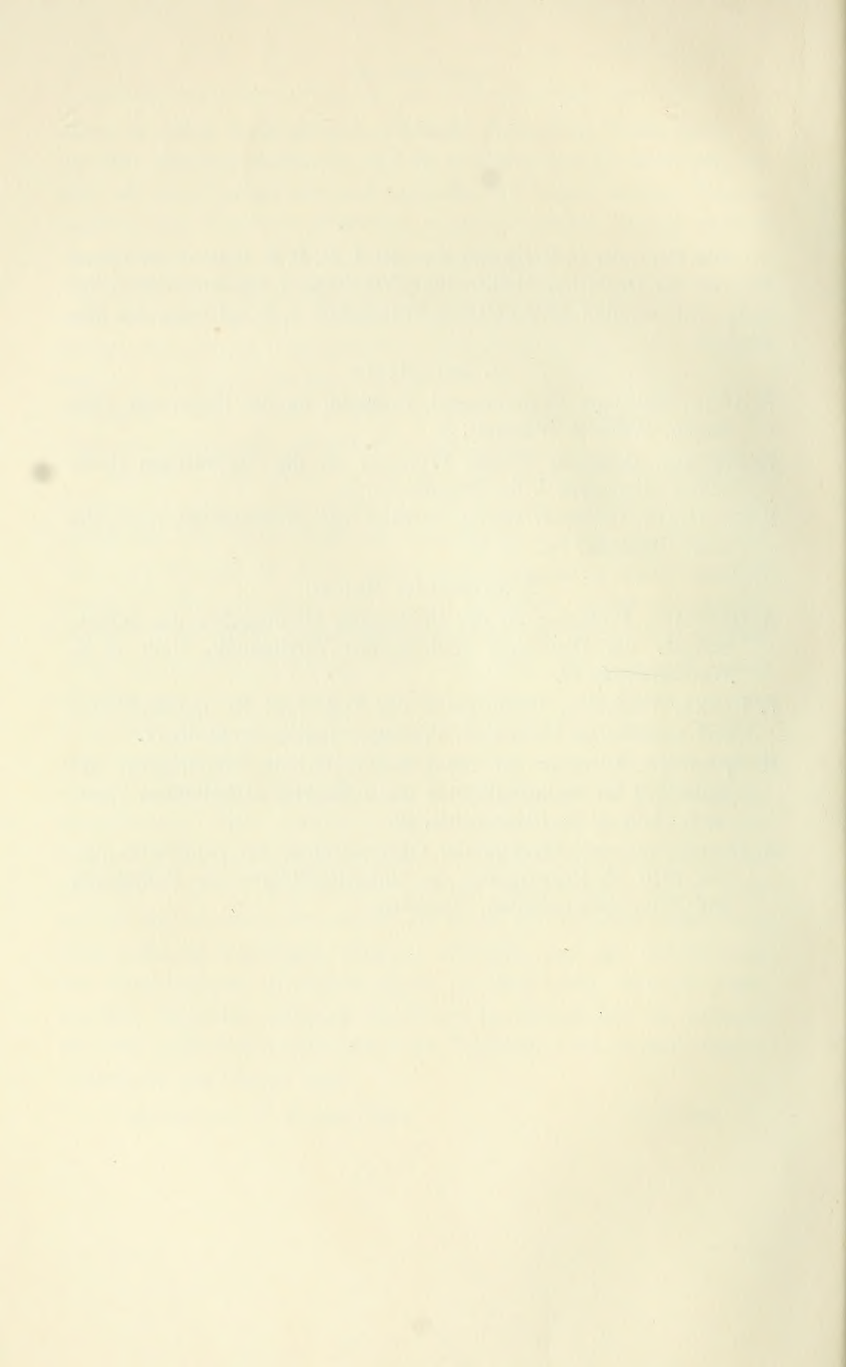
2. Nationaler Beirat:

A. Gutzmer, Professor an der Universität, Herausgeber des Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Halle a. S., Wettinerstraße 17.

F. Poske, Professor, Herausgeber der Zeitschrift für physikalischen und chemischen Unterricht, Friedenau-Berlin, Fregestr. 71.

H. Schotten, Direktor der Städt. Oberrealschule, Herausgeber der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, Halle a. S., Reichardtstr. 19.

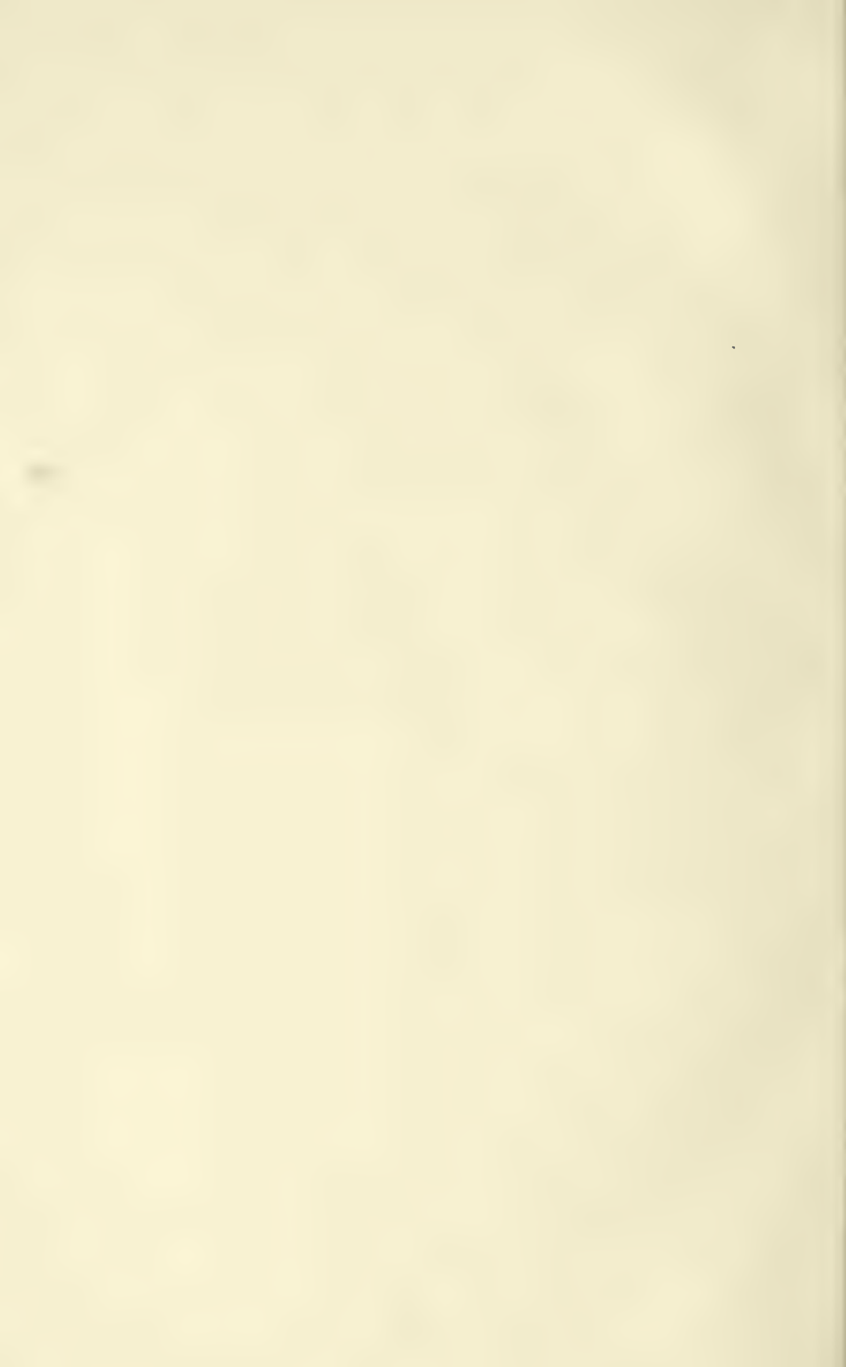
A. Thaer, Professor, Direktor der Oberrealschule vor dem Holstentor, von 1910 ab Herausgeber der Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften, Hamburg.



W. LIETZMANN

STOFF UND METHODE IM MATHEMATISCHEN UNTERRICHT DER NORDDEUTSCHEN HÖHEREN SCHULEN

AUF GRUND DER VORHANDENEN LEHRBÜCHER



Vorrede.

Der vorliegende von der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission veranlaßte Bericht soll den Lehrstoff und die Lehrmethode des mathematischen Unterrichts an den höheren Knabenschulen Deutschlands zum Gegenstand haben, soweit die Lehrbücher davon ein Bild geben. Er berücksichtigt ganz allgemein die deutschen Verhältnisse, doch wird eine gewisse, durch die berufliche Tätigkeit des Verfassers erklärliche Bevorzugung Norddeutschlands zutage treten. Die Kommission hat weitere Berichte für Süddeutschland und Sachsen in Aussicht genommen.

Die Darstellung erfolgt im großen und ganzen ohne Rücksicht auf die Lehrplanverteilung, die in den verschiedenen Staaten und an den verschiedenen Schularten eine wechselnde ist; über die Lehrpläne und Prüfungsbestimmungen ist ein ergänzender Bericht in Vorbereitung.

Aber auch trotz dieser Einschränkungen ist die Aufgabe noch so umfangreich, die Fülle des Stoffes so erdrückend, daß es unbedingt geboten erschien, sich auf eine Herausarbeitung der allgemeinsten Fragen und auf deren Belebung durch eine Anzahl von Einzelzügen zu beschränken. Der einzelne wird mit der dabei getroffenen Auswahl nicht immer einverstanden sein; er wird vielleicht auch die eine oder andere ihm wichtig erscheinende Tatsache vermissen. Dem kann nur entgegengehalten werden, daß eben eine Grenze gezogen werden mußte, um nicht ins Uferlose zu kommen – sie ist übrigens, glaube ich, eher zu weit als zu eng gewählt, – und daß diese Grenze natürlich nur eine mehr oder weniger willkürliche sein konnte.

Wenn ferner manchem Leser die Darstellung im einzelnen zuweilen etwas weitschweifig erscheinen sollte, so bitte ich in Rechnung zu ziehen, daß die Rücksicht auf den internationalen Zweck der Arbeit an vielen Stellen Ausführlichkeit notwendig machte, wo für den deutschen Leser kurze Andeutungen genügt hätten.

Die vorliegende Zusammenstellung erforderte sehr viel Literatur, noch dazu solche, auf die in den größeren Bibliotheken in der Regel kein Wert gelegt wird. Ich habe daher der Königlich Preußischen Auskunftsstelle des höheren Unterrichtswesens in Berlin und der Direktion des mathematischen Lesezimmers der Universität Göttingen sehr zu danken, daß sie mir ihr

reiches Material zugänglich machten; auch einer großen Zahl von Verlagsanstalten bin ich für die Überlassung von Lehrbüchern zu Dank verpflichtet.

Bei der Korrektur der Arbeit durfte ich mich der gütigen Unterstützung einer großen Anzahl von Herren erfreuen, von Mitgliedern der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission und des Deutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, von nord- und süddeutschen Kollegen. Ihnen allen bin ich für vielfache Anregungen, von denen eine große Zahl dem Berichte noch zugute kommen konnte, zu großem Danke verpflichtet.

Travemünde, im August 1909.

W. Lietzmann.

Inhaltsübersicht.

Anhang.

Erster Teil.

Das mathematische Schulbuch.

1. Verschiedene Arten von mathematischen Schulbüchern.

Um einen Überblick über die verschiedenen Arten mathematischer Schulbücher zu erhalten, ist es vorerst angebracht, ihren Zweck ins Auge zu fassen. Die Ansichten gehen hier weit auseinander, und damit ist sofort eine Quelle großer Mannigfaltigkeit in der mathematischen Schulbuchliteratur gegeben.

1. Allgemein zugestanden wird, daß der vornehmste Zweck des Schulbuches der ist, die häusliche Wiederholung des im Unterricht Durchgenommenen zu ermöglichen und zu erleichtern.

2. Die Benutzung des Schulbuches beim Unterricht selbst wird nur von wenigen verteidigt (selbstverständlich muß stets in irgendeiner Weise der Konnex zwischen Lehrbuch und Unterricht für die häusliche Arbeit zumal des jüngeren Schülers hergestellt werden).

3. Das Schulbuch auch zur Vorbereitung auf den im Unterricht neu durchzunehmenden Stoff unmittelbar zu benutzen, ist heute kaum mehr gebräuchlich.

Handelt es sich bisher um die Verknüpfung von regelmäßiger Schul- und Hausarbeit, so gehen einige Schulbücher in ihren Zielen noch darüber hinaus:

4. Sie wollen es dem Schüler ermöglichen, durch Schulversäumnis entstandene Lücken auszugleichen, wollen also so ausführlich sein, daß sie auch zum Selbstunterricht dienen könnten.

5. Andere wieder wollen an mehr oder weniger zahlreichen Stellen über den Unterricht hinausführen, sie erstreben also die Vollständigkeit, die dem Unterricht meist abgehen muß, oder fügen an geeigneten Stellen Exkurse ein, die an den Schulstoff anschließen, ohne doch ihm anzugehören.

6. Eine große Anzahl von Schulbüchern wendet sich, meist ohne es ausdrücklich zu sagen, ebenso an den Lehrer wie an den Schüler. Ich habe nicht nur die in deutschen Schulbüchern üblichen, oft recht umfangreichen und zuweilen didaktisch wertvollen Vorworte im Auge; es ist schon manches Lehrbuch, wenn auch nicht ganz unverblümt, mehr den Schulamtskandidaten als den Schülern empfohlen worden. Jedesmal wenn neue, dem Unterrichtsbetrieb bisher fremde Gedanken, seien sie nun auf den Stoff oder auf die Methode gerichtet, auftauchen,

sind solche Bücher sogar eine Notwendigkeit. Diese Bücher geben deshalb oft dem Außenstehenden ein besseres Bild von dem wirklichen Schulbetriebe oder doch von den verschiedenen Strömungen in ihm als das ureigentliche Schulbuch.

Ein erster Artunterschied zwischen Schulbüchern wird durch die Bezeichnungen Leitfaden und Lehrbuch (im Sinne von ausführliches Lehrbuch) festgelegt. Der Leitfaden will ausschließlich dem ersten der oben genannten Zwecke dienen. Er gibt das Mindestmaß des Lehrstoffes in knapper Form, die Beweise oft nur in Andeutungen, so daß der Schüler nur in eigener Arbeit an der Hand des Leitfadens den Unterrichtsstoff rekapitulieren kann. In seltenen Fällen werden sogar nur die Sätze selbst ohne Beweis aufgeführt (Feld und Serf[1]); doch ist diese Gepflogenheit wohl nur ein Nachklang einer früheren Zeit, wo der Lehrer die Sätze in der Schule diktierte und der Schüler zu Hause die in der Schule durchgenommenen Beweise ausarbeitete. Der Leitfaden läßt dem Lehrer weiten Spielraum, nach seinem Belieben das Lehrgebäude zu erweitern; zu diesem Zweck findet sich meist reiches Material in Aufgaben, Übungssätzen und dgl. angedeutet. Als typische Vertreter dieser Gattung von mathematischen Schulbüchern nenne ich etwa die Leitfäden von Mehler und Thieme. Bei Thieme steckt zum Beispiel das ganze Apollonische Berührungsproblem in den Übungssätzen.

Dem Leitfaden steht das Lehrbuch gegenüber. Hier will ich etwa als Beispiele von älteren das Lehrbuch von Helmes, von neueren das von Holzmüller anführen. Diese Lehrbücher sind umfangreich und ausführlich genug, um auch all den andern oben namhaft gemachten Zwecken gerecht zu werden. Es wird das Maximum des Lehrstoffes der Schule gegeben, dem Lehrer bleibt die Aufgabe, nach seinem Belieben zu kürzen.

Die Ansichten darüber, ob der Leitfaden oder das Lehrbuch das Richtige sei, sind geteilt; vielleicht erklärt sich die Mehrheit gegenwärtig für den Leitfaden. Man macht vor allem geltend, daß der Leitfaden vom Schüler wirklich eigene häusliche Arbeit fordere, und daß er für den Lehrer insofern günstiger sei, als für ihn das Hinzufügen von Lehrstoffpartien weit leichter sei als das Ausscheiden. Die Mehrzahl der gebräuchlichen Schulbücher hält einen Mittelweg zwischen Leitfaden und Lehrbuch inne. Ich nenne etwa Bork-Nath und Heinrich Müller; sie sind bestrebt, dem Schüler auch die selbständige Ausfüllung gelegentlicher Lücken zu ermöglichen.

Eine zweite Unterscheidung liefern die Begriffe methodisches und systematisches Schulbuch. Das systematische Schulbuch — darunter fällt die Mehrzahl der Leitfäden, aber auch ein Teil der Lehrbücher — gibt den Lehrstoff in seiner endgültigen Form, ohne daß die Art, wie diese Form im Unterricht gewonnen wurde, noch erkennbar

1) Die vollständigen Titel aller im Text angeführten Schulbücher sind dem angehängten Literaturverzeichnis zu entnehmen.

ist, und es gliedert diesen Stoff nach logischen, nicht nach psychologischen Gesichtspunkten.

Das methodische Schulbuch läßt im Gegensatz dazu den im Unterricht verfolgten Gang in seinen Grundzügen erkennen und ordnet auch den Stoff in der Weise an, wie er im Unterricht aufeinander folgt.

Am deutlichsten wird das am Beispiel klar: Das systematische Schulbuch beginnt das Trigonometriepensum mit der Definition der trigonometrischen Funktionen, sei es nun erst für das rechtwinklige Dreieck oder gleich für beliebige Winkel. Anders das methodische Lehrbuch. Da beginnt man etwa (ich folge dem Leitfaden von Schwering) mit der Ableitung der Heronischen Formel für den Dreiecksinhalt, aus der dann Ausdrücke für die Höhen des Dreiecks gefunden werden. Jetzt wird die Sinusfunktion definiert, und mit ihrer Hilfe werden aus den rechtwinkligen Teildreiecken die Winkel des Dreiecks berechnet. Dann wird gezeigt, wie auch eine andere Winkelfunktion, der Cosinus, zum Ziel führt. Dann werden tang und cotg hinzugefügt, und so ist hier das, womit das systematische Lehrbuch beginnt, das Ergebnis eines Gedankenganges, der zugleich die Verwendbarkeit der neueingeführten Begriffe zeigt. Ein zweites Beispiel möge den Gegensatz in der Stoffanordnung beleuchten. Im systematischen Lehrbuch tritt das Quadratwurzelausziehen in der Arithmetik erst auf, nachdem die allgemeine Potenz- und Wurzelrechnung erledigt ist, manchmal sogar bescheiden als Anhang. Eine Rolle spielt sie dann erst wieder später, wenn das Lehrbuch in seinem zweiten Teile die Gleichungslehre behandelt. Ganz anders die Anordnung in einem methodischen Schulbuche. (Ich halte mich jetzt etwa an Holzmüller). Nach Erledigung der Gleichung ersten Grades tritt die rein quadratische Gleichung auf, die Anlaß zum Wurzelausziehen gibt; dann folgt die allgemeine Gleichung zweiten Grades und erst dann allgemeine Potenz- und schließlich auch Wurzelrechnung.

Streng systematische Bücher existieren kaum, ebensowenig streng methodische; die Mehrzahl schlägt auch hier einen Mittelweg ein, so daß also das systematische Lehrbuch mit methodischem Einschlag überwiegt. Als typisches Beispiel dieser Mittelgruppe nenne ich etwa das Lehrbuch von Gille. Man könnte es auf den ersten Blick für ein rein methodisches Lehrbuch halten, weil es in der Behandlung der einzelnen Lehrsätze das heuristische Verfahren andeutet; es steht aber, wie Thaer richtig sagt, „in bewußtem Gegensatz zu den methodischen Werken von Holzmüller und Schwering, es bildet ein in den einzelnen Hauptteilen logisch scharf gegliedertes und durchgeführtes System.“

Scheinbar sind die Vorzüge des methodischen Lehrbuches sehr groß; der Schüler kann viel leichter dem im Unterricht eingeschlagenen Gange bei der häuslichen Arbeit folgen; er findet nicht nur einen einzigen Weg durch das Gebiet, sondern Verbindungswege führen von diesem zu jenem Satze, er sieht ein Netz von geometrischen Wahrheiten. „Wichtige Sätze erscheinen gewissermaßen wie die Knotenpunkte eines Eisenbahnnetzes“

(Holzmüller[1]). Der schwerwiegende Nachteil ist aber der, daß ein methodisches Lehrbuch den Lehrer in seiner Bewegungsfreiheit beschränkt. Er muß sich dauernde „Bevormundung gefallen lassen", sofern er es nicht vorzieht, das eingeführte Lehrbuch möglichst wenig zu benutzen; er muß dem Verfahren des Lehrbuches ganz und gar folgen, „sonst wird es halbe Arbeit". Schon H. Graßmann sagt in seinem Lehrbuch der Mathematik (1861): Die heuristische Methode, „in einem Lehrbuche, was in den Händen der Schüler ist, zugrunde zu legen, wäre ein ganz verfehltes Unternehmen. Es würde dadurch dem Schüler nicht nur die Repetition erschwert, sondern auch der Lehrer gerade in demjenigen eingeengt werden, was auf die individuellste Weise aus seiner und der Schüler besonderen Begabung und aus der gegenseitigen Beziehung zueinander hervorfließen muß." Es ist vielleicht das beste Zeugnis für die eigene Arbeit der Lehrer, daß die systematischen Schulbücher bei weitem überwiegen.

Noch eine Bemerkung sei angefügt: Man hat zuweilen (Holzmüller tut es z. B. in der Vorrede zu seinem Lehrbuch) mit dem Begriff des Systematischen den des streng Wissenschaftlichen (ein in älteren Lehrbüchern recht beliebtes Wort, so sagt z. B. Fülle, Lehrbuch der Stereometrie 1844: „Der Vortrag der Mathematik muß in den obersten Klassen durchaus streng wissenschaftlich sein") verknüpft; das ist eine durchaus nicht notwendige und, wie heut in der Zeit der Axiomatik wohl gesagt werden kann, für ein Schulbuch auch nicht erfüllbare Verknüpfung. Und, wie schon gesagt, ohne einen methodischen Einschlag geht es nirgends ab, äußere er sich vielleicht auch nur in der – im Gegensatz zu Euklid – methodischen Auswahl und der organischen Anordnung des Stoffes.

Was nun schließlich noch eine äußerliche Arteneinteilung der Schulbücher anlangt, so bildet ein wesentliches Unterscheidungsmoment die Schulgattung, an der das Buch gebraucht wird. Daß die Lehrpläne auch gleicher Schulgattungen in verschiedenen deutschen Staaten sich oft wesentlich unterscheiden, bedingt eine recht buntscheckige Ausgabenreihe, die sich natürlich nur vielbenutzte Schulbücher leisten können. Diese wird womöglich noch vermehrt, wenn, wie das in letzter Zeit bei mehreren Büchern geschehen, eine durchgreifende Neubearbeitung erschienen ist, wobei dann das Stammbuch von konservativen Anstalten weiter beibehalten wird. Ich will all das nur an der in Preußen weitaus am meisten benutzten Aufgabensammlung von Bardey erläutern. Der alte Bardey für Vollanstalten, der zuerst 1871 erschien, liegt heute in 28. Auflage vor. 1900 gaben Pietzker und Presler eine neue Bearbeitung heraus, 1908 erschien davon die 6. Auflage. 1907 hat Lengauer danach eine Ausgabe für Bayerische Mittelschulen (2. Auflage 1909),

1) Vergl. dagegen A. Gille, Unterrichtsfach oder Unterrichtsprinzip. Lehrproben und Lehrgänge. Heft 74 (1903), 17: Für den Schüler „ist es gut, wenn er zunächst eine klare zusammenhängende Bahn, die nach oben führt, vor sich hat. Ist er auf einem freieren Punkte mit größerem Überblick angelangt, dann mag er die Verschlingungen des Netzes schlagen."

1903 Schiffner und Wagner eine für österreichische Mittelschulen besorgt. Außerdem existiert (2. Auflage 1907) eine Bearbeitung von Seyffarth für Lehrerseminare, eine von S. Jacobi und A. Schlie für Metallindustrieschulen (1908). Für Nichtvollanstalten ließ Bardey die arithmetischen Aufgaben zuerst 1881 erscheinen; die Sammlung deckt sich im Aufgabenmaterial nicht mit der Ausgabe für Vollanstalten. 1905 ist danach die 14. Auflage erschienen. Auch hier haben Pietzker und Presler eine neue Ausgabe besorgt, die 1906 in drei Auflagen vorlag. Für sächsische Realschulen hat H. Hartenstein (8. Auflage 1909) den Bardey bearbeitet, eine Ausgabe, die übrigens auch in Preußen mehrfach eingeführt ist. Infolge des jüngsten Ausbaues der Realschulen Sachsens hat Hartenstein 1907 eine neue Oberstufe hinzugefügt. – Wir haben nicht das komplizierteste Beispiel gewählt, das mathematische Unterrichtswerk von Heinrich Müller umfaßt im Teubnerschen Katalog $6\frac{1}{2}$ Druckseiten.

Im Literaturnachweis am Schlusse dieses Berichtes ist von den Lehrbüchern in der Regel nur eine Ausgabe, meist die umfassendste, angegeben.

Der vorliegende Bericht beschränkt sich auf die höheren Knabenschulen. Die Neuordnung des höheren Mädchenschulwesens in Preußen[1]) hat in den letzten Monaten das Erscheinen einer ganzen Reihe in der Mehrzahl durchaus „moderner“ mathematischer Lehrbücher für höhere Mädchenschulen zur Folge gehabt. Ich begnüge mich damit, einige von ihnen nur namhaft zu machen. Etwas älteren Datums ist die Arithmetik und Algebra von Otto und Siemon; ganz neu sind das Werk von Crantz und das zur Zeit noch nicht abgeschlossene von Noodt. Von mehreren Lehrbüchern für Knabenschulen sind oder werden Ausgaben für Mädchenschulen besorgt, ich führe an: Heinrich Müller-Mahlert, Knops-Meyer nach Heilermann-Diekmann und Koppe-Diekmann, Behrendsen-Götting.

2. Lehrbuchstatistik.

Es gibt eine ganze Anzahl von Lehrbuchzusammenstellungen, doch nur wenige, die einigermaßen gründlich sind. Aus der allgemeinen mathematischen Literatur erwähne ich den Führer durch die mathematische Literatur von F. Müller[2]), der die Elementargeometrie in einer dem Rahmen des Buches entsprechenden Weise berücksichtigt. Reidt gibt in seiner Anleitung[3]) ein Verzeichnis der wichtigsten Lehrbücher mit kurzer Kennzeichnung einzelner, doch ist diese Liste von dem neuen Herausgeber

1) Vergl. G. Noodt, Über die Stellung der Mathematik im Lehrplan der höheren Mädchenschule vor und nach der Neuordnung des höheren Mädchenschulwesens in Preußen. Berichte und Mitteilungen, veranlaßt durch die Internationale Mathematische Unterrichtskommission. II. 1909. Leipzig (Teubner); auch Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. 40 (1909), 185.

2) F. Müller, Führer durch die mathematische Literatur. Leipzig. (Teubner.) 1909.

3) F. Reidt, Anleitung zum mathematischen Unterricht an höheren Schulen. 2. A. von H. Schotten. Berlin. (G. Grote.) 1906.

der 2. Auflage nicht vervollständigt worden. M. Simon erledigt in seiner Didaktik[1]) die Lehrbücher auf drei Seiten, wie er ja überhaupt kein Freund des Lehrbuches ist. Seine Elementargeometrie[2]) enthält dagegen eine reichhaltige Liste von Schulbüchern, jedoch meist ohne nähere Charakterisierung. Eine angenähert vollständige Literaturübersicht über die Elementargeometrie geben die alljährlich erscheinenden Jahresberichte für das höhere Schulwesen von C. Rethwisch (Der letzte ist der 22. Band für 1907.) Die Abschnitte über reine Mathematik hat bis zum Jahre 1903 A. Thaer, bis 1906 J. Tropfke, dann K. Weise verfaßt.

In dem folgenden Berichte verbot es sich von selbst, Vollständigkeit in der Schulbuchliteratur anzustreben. Es sind nicht einmal alle tatsächlich im Schulgebrauch befindlichen Lehrbücher benutzt, dafür allerdings eine große Reihe solcher Lehrbücher, die vielleicht in keiner Schule eingeführt sind. Maßgebend war in erster Linie die Wichtigkeit des Inhalts, erst in zweiter Linie die Verbreitung. Zeitlich ist systematisch bis etwa 1892 zurückgegangen, doch ist eine große Zahl älterer Lehrbücher mit in den Bericht einbezogen, sofern bei ihnen von einem Einfluß auf den gegenwärtigen Unterricht gesprochen werden kann.

Über die zahlenmäßigen Verhältnisse kann man sich ein Bild wenigstens für Preußen verschaffen an der Hand der 1880 und 1890 im Zentralblatt[3]) und der 1900 und 1906 als besonderes Buch von E. Horn[4]) veröffentlichten Listen. Eine vor etwa 10 Jahren von I. W. A. Young gemachte, auf Programmstudien fußende Zusammenstellung[5]) scheidet aus, da die Listen unvollständig sind.

Die Anzahl der verschiedenen, an preußischen Lehranstalten eingeführten Lehrbücher und Aufgabensammlungen ist trotz der äußerst raschen Vermehrung der Anstalten immer geringer geworden; sie betrug (da wegen der verschiedenen Teile und Ausgaben der einzelnen Bücher eine gewisse Willkür in der Zählung bleibt, haben die folgenden Zahlen nur ungefähren Wert):

1880	130	Lehrbücher
1890	132	„
1899	100	„
1906	90	„

Dieses eigentümliche Verhalten erklärt sich aus der Geschichte des Lehrbuches. Als die Lehrbücher immer mehr an Stelle des Diktierens

1) M. Simon, Didaktik und Methodik des Rechnens und der Mathematik. 2. A. München. (C. H. Beck.) 1908.

2) — , Über die Entwicklung der Elementargeometrie im XIX. Jahrhundert. Leipzig. (Teubner.) 1906.

3) Zentralblatt für die gesamte Unterrichtsverwaltung in Preußen.

4) E. Horn, Verzeichnis der an den höheren Lehranstalten Preußens eingeführten Schulbücher. 1. A. 1900. 2. A. 1906. Leipzig. (Teubner.)

5) Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. 29 (1898), 410.

in Übung kamen, schrieb eben fast jeder Lehrer sein eigenes Lehrbuch. So ist es erklärlich, daß früher sehr viele Lehrbücher und Aufgabensammlungen an nur einer Anstalt eingeführt waren, meist wohl an der Anstalt des Verfassers. Das hat, dank dem Einschreiten der Behörden, stark nachgelassen. Die folgenden Zahlen erläutern das. Die Zahl der nur an einer Anstalt Preußens eingeführten mathematischen Schulbücher betrug:

1880	67	Lehrbücher
1890	73	„
1899	24	„
1906	16	„

Dafür ist die Zahl der Lehrbücher, welche in großer oder sehr großer Anzahl eingeführt sind, entsprechend gestiegen. An mehr als 25 Schulen waren eingeführt:

1880	7	Lehrbücher
1890	10	„
1899	14	„
1906	17	„

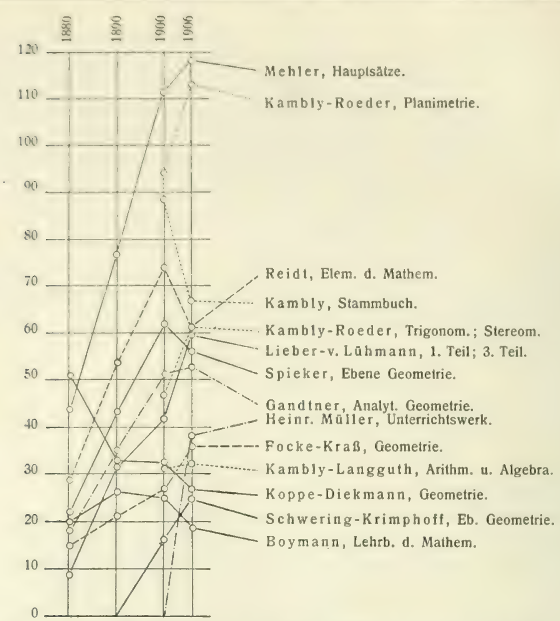
Es ist also sehr deutlich das Streben nach einer gewissen Gleichförmigkeit zu beobachten.

Das beigegebene erste Schema gibt einen Überblick über die zahlenmäßige Verteilung derjenigen Lehrbücher, die irgendeinmal im Laufe der Zeit von 1880 an die Zahl von 25 Anstalten (immer in Preußen!) überschritten haben. Dabei ist ein Buch außer acht gelassen, nämlich der alte Kambly, der 1880 an 217, 1890 an 182 Anstalten eingeführt war (um diese Zahlen einzutragen, hätten wir die Höhe des Schemas verdoppeln müssen!), erst die 1900 auftauchenden Neuausgaben sind nebst dem nun in vernünftigen Grenzen sich bewegenden Stammbuche eingetragen.[1]) Für die Darstellung ist in Betracht zu ziehen, daß die absoluten, nicht die relativen – auch die starke Vermehrung der Anstalten in Rechnung ziehenden – Zahlen gegeben sind.

Es sei nur auf ein Moment der Lehrbuchverteilung, das die Tabelle zeigt, hingewiesen, auf den Konservativismus. Nur zwei neuere Werke, das von Schwering-Krimphoff, und dann mit erheblich höheren Zahlen das von Heinrich Müller haben sich im Verlaufe der mehr als 25 Jahre zu den alten gesellen dürfen; Schwering-Krimphoff ist auch das einzige methodische Schulbuch in der ganzen Reihe.

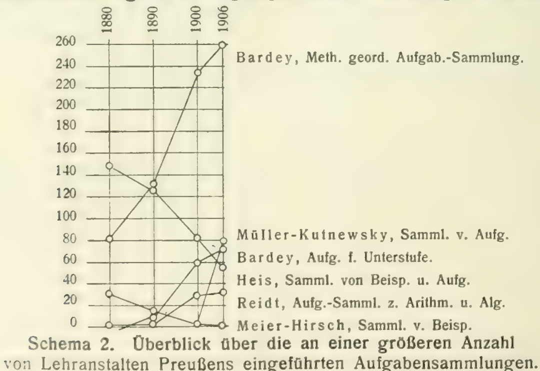
Aus dem starken Übergewicht langeingeführter Lehrbücher ergibt sich, von welcher entscheidenden Bedeutung es für moderne Strömungen im Unterricht sein muß, daß ihre stofflichen oder methodischen Neuerungen Aufnahme in diese herrschenden Bücher finden. Erst dann kann man von dem Durchdringen einer Reformbewegung sprechen, wenn sie auch hier ihren Widerhall findet. Es ist bei alledem nur gut,

1) Von dem Kambly'schen Unterrichtswerk sind nach einer Mitteilung des Verlages bisher über 850 000 Exemplare abgesetzt.



Schema 1. Überblick über die an einer größeren Anzahl von Lehranstalten Preußens eingeführten Lehrbücher.

daß auf der andern Seite ein Eingehen auf neue Bestrebungen für solche Bücher eine Notwendigkeit, häufig sogar eine Lebensfrage ist. Verschließen



Schema 2. Überblick über die an einer größeren Anzahl von Lehranstalten Preußens eingeführten Aufgabensammlungen.

sie sich dem Fortschritt, oder geben sie ihm zu spät nach, so sinkt ihr Einfluß, vielleicht zahlenmäßig erst langsam, aber um so stetiger.

Das zweite Schema gibt in derselben Weise und nach denselben Quellen wie bei den Lehrbüchern eine Übersicht über die Aufgabensammlungen. Hier fällt der Abfall von Meier-Hirsch und Heis (des letzteren neue Bearbeitung war 1906 noch nicht erschienen) und das ungeheure Übergewicht der beiden Bardey-Ausgaben in die Augen. Auch hier wieder überrascht die Tatsache, daß nur ein einziges neueres Buch, die Aufgabensammlung von Müller-Kutnewsky, eine große Verbreitung (1906 sogar die zweite Stelle) gefunden hat.

3. Einige allgemeine Bemerkungen über die Lehrbücher.

a. Die Verfasser der Schulbücher sind, man kann sagen ausschließlich, Lehrer der höheren Schulen. Die Zahl der Hochschullehrer, die dem Unterricht an höheren Schulen ein tätiges Interesse entgegenbringen, ist ja bei uns, im Gegensatz etwa zu Frankreich und Italien, sehr gering. Schlömilch, Hauck, Heinrich Weber, Staeckel, Gutzmer, Krause, besonders aber F. Klein wären etwa zu nennen. Allerdings leitet sich, wie es scheint, gegenwärtig dank der Tätigkeit von F. Klein ein Umschwung ein. Immer aber ist noch der Gegensatz zwischen Universitätsmathematik und Schulmathematik ein für die deutschen Verhältnisse kennzeichnendes Merkmal. Das hat seine großen Nachteile. Man hat recht oft den Eindruck, als ob die Lehrbuchverfasser nicht immer Schritt halten mit der Wissenschaft; das Kapitel der Axiomatik ist dafür ein schlagender Beweis. Auf der anderen Seite urteilt aber auch die Universitätsmathematik, soweit sie überhaupt der Schulmathematik Interesse entgegenbringt, zuweilen zu sehr von ihrem modernen Standpunkt aus und zieht nicht genügend den geschichtlichen Werdegang in Betracht. Wenn Heinrich Weber von „dem großen Umfang der Elementargeometrie mit ihren zahllosen Sätzen und Sätzchen über Dreieck und Kreis, Tetraeder und Kugel, die einige wenige projektive Grundgedanken immer wieder variieren und spezialisieren" spricht, so hat er zweifellos vom Standpunkte der modernen Universitätsmathematik, möglicherweise auch einer zukünftigen Schulmathematik recht, aber deswegen hat doch auch diese Seite der gegenwärtigen Mathematik allein schon durch ihr Dasein ihren Wert. –

Um in einem Lehrbuche nicht die Anschauungen eines einzelnen, sondern vielmehr die einer Gesamtheit zu haben, sind Stimmen laut geworden, es durch gemeinsame Arbeit der Lehrer herzustellen. Vor längerer Zeit hat das E. Müller[1]), später dann R. Most[2]) vorgeschlagen, der sogar schon die Entschädigung der jetzigen Lehrbuchverfasser ins Auge faßt. Ist dieser Gedanke auch nie verwirklicht worden, so sind

1) E. Müller, Lehrzweck, Lehrbuch und Lehrmethode im mathematischen Unterricht. Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. 2 (1871), 192.

2) R. Most, Über den Bildungswert der Mathematik. Pr. Städt. Realgymnasium. Coblenz. 1895.

doch immerhin Lehrbücher mehrfach in der Weise entstanden, daß sich mehrere Fachlehrer einer Anstalt zusammengetan und in gemeinsamer Arbeit oder an der Hand einer von einem Kollegen verfaßten Vorlage einen Leitfaden zusammengestellt haben.

Noch eine Bemerkung über die Verfasser der Schulbücher. Jedes in vielen Auflagen verlegte Schulbuch hat seine Geschichte, und die heute vorliegende Gestalt ist nicht lediglich durch den einstigen Verfasser, sondern meist durch eine längere oder kürzere Reihe von Bearbeitern und alles das wieder unter dem Einfluß der Zeitströmungen geschaffen. Wir sagten schon oben, daß diejenigen Bücher die meistverbreiteten sind, welche am unpersönlichsten auftreten, während sich ganz im Gegenteil dazu der Fortschritt meist an stark individuell gefärbte Bücher knüpft.

Verkehrt wäre es auch, von dem Lehrbuch eines Schulmannes auf seinen Unterricht schließen zu wollen. Baltzers bekanntes Lehrbuch läßt z. B. durchaus nicht erkennen, daß die Beweisführung in seinem Unterricht durchaus analytisch, seine Lehrmethode heuristisch war. Noch mehr aber ist es verfehlt, nach dem eingeführten Lehrbuch den Unterricht in der betreffenden Anstalt beurteilen zu wollen, „weil es bis jetzt wenigstens noch eine große Anzahl Männer gab, die ihren eigenen Gang durchdenken und befolgen konnten" (Simon). – Dort, wo man z. B. einen den heutigen Reformbestrebungen durchaus entsprechenden Unterricht – und zwar vielleicht mit der Genehmigung der Behörden – erteilt, wird in der Regel ein althergebrachtes Lehrbuch im Bücherverzeichnis aufgeführt, das im Unterricht nur benutzt wird, um den Schüler gelegentlich einmal auf einzelne Sätze oder Aufgaben hinzuweisen.

b. Die Lehrbuchsprache. Die Lehrbuchsprache ist im wesentlichen die des Unterrichts, doch noch knapper als diese; oft wird die Kürze bis aufs äußerste getrieben. Mit der Kürze ist manche sprachliche Ungenauigkeit verknüpft. Pietzker[1]) und neuerdings besonders Schlesinger[2]) haben auf Unrichtigkeiten in dieser Hinsicht hingewiesen, und ihre Bemerkungen haben vielfach eine sprachliche Durchsicht der Lehrbücher bei Neuauflagen zur Folge gehabt. Auch ein Einfluß der auf möglichste Vermeidung der Fremdwörter gerichteten Bestrebungen des „Deutschen Sprachvereins" ist mehrfach festzustellen[3]), gehen doch einige so weit, Bezeichnungen wie Hypotenuse (= Spannseite) und Kathete (= Lotseite) auszumerzen.

c. Schließlich noch einige Worte über das geschichtliche Element im Lehrbuch. Forderungen in dieser Hinsicht sind in neuerer Zeit wieder

1) F. Pietzker, Logik und Sprachrichtigkeit im mathematischen Unterricht. Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften. 2 (1896), pg. 2,17.

2) Schlesinger, Über die „reine" Sprache in den mathematischen Schulbüchern. Pr. Lessinggymnasium. Berlin (No. 67) 1904.

3) Vergl. z. B. Buchrucker, Über die Sprache der Lehrbücher für Mathematik und Naturwissenschaft. Vortrag auf dem 3. rheinischen Philologentag. Mathematisch-Naturwissenschaftliche Blätter 6 (1909).

in stärkerem Maße erhoben, sie sind natürlich nicht neu. Die älteren Lehrbücher brachten in dieser Hinsicht recht viel; ich nenne vor allem Helmes, aber auch das Verdienst Baltzers ist ja bekannt. Heute hat selbst ein Leitfaden gelegentliche Anmerkungen, zumal Zahlenangaben über einzelne Mathematiker. Leider wird aber vielfach über Ungenauigkeit in den Angaben geklagt, manche Versehen z. B. in der Geschichte der mathematischen Zeichen, seien aus den Lehrbüchern nicht auszutilgen. Der Lehrer wird oft selbst zu Cantors Geschichte der Mathematik[1]) greifen, die in vielen Lehrerbibliotheken vorhanden ist. Für seinen Privatgebrauch wie geschaffen ist J. Tropfkes Geschichte der Elementarmathematik[2]), die bis auf die Quellen zurückgeht. Wenn eine allmähliche Besserung im Verhältnis der Schule zur Geschichte der Mathematik sich anbahnt, so ist es nicht zum wenigsten ein Verdienst des Buches von Tropfke. In den Händen manches Schülers wird sich die kleine Geschichte der Mathematik von Sturm[3]) aus der Sammlung Göschen finden.

Wenn wir im folgenden unsere eigentliche Aufgabe, Stoff und Methode im mathematischen Schulbuch, in Angriff nehmen, so ist eine Bemerkung vorauszuschicken. Es ist versucht worden, dem Tatsachenmaterial gegenüber eine möglichst objektive Stellung einzunehmen. Das ist eine schwierige, oft nicht vollständig erfüllbare Aufgabe, und so wird wohl manchmal die Ansicht des Berichterstatters sich unerwünscht vordrängen. Aber das Bestreben lag jedenfalls vor, so objektiv wie möglich zu sein. Was herauskommt, wenn man durchaus subjektiv urteilt, ersieht man aus den Urteilen zweier bekannter Kritiker, es sind Simon und Thaer, über ein und dasselbe Buch; dem einen ist es „eine dürftige Leistung“, dem andern „vereinigt es in sich eine so große Menge von Vorzügen, daß es rückhaltlos empfohlen werden kann.“

Und noch ein Bekenntnis: Es war natürlich nicht möglich, alle die hier berücksichtigten Lehrbücher – zu denen noch eine große Anzahl anderer im Literaturverzeichnis nicht genannter Bücher kommen — für den Zweck dieses Berichts von Anfang bis zu Ende durchzulesen, das hätte eine Zeit von mehreren Jahren erfordert, die zudem meines Erachtens schlecht angewandt wäre. Denn schließlich ergibt auch die genaue Lektüre noch nicht das richtige Bild von einem Lehrbuch, sondern erst ein Unterrichtsversuch an der Hand des Lehrbuches – und das bei allen durchzuführen, wäre für den einzelnen unmöglich. So habe ich mich in vielen Fällen damit begnügen müssen, die Bücher nach ihren charakteristischen Merkmalen durchzusehen, ohne auf die Einzelheiten einzugehen.

1) M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. I. Bd. 3. A. 1907. II. Bd. 2. A. 1900. III. Bd. 2. A. 1901. IV. Bd. 1908. Leipzig (Teubner).

2) J. Tropfke, Geschichte der Elementarmathematik. I. Bd. 1902. 2. Bd. 1903. Leipzig. (Veit & Co.)

3) A. Sturm, Geschichte der Mathematik Leipzig. (G. J. Göschen.)

Zweiter Teil.

Planimetrie, Trigonometrie, Stereometrie.

4. Propädeutik des geometrischen Unterrichts.

Daß dem eigentlichen Geometrieunterricht eine Vorstufe, ein sogenannter propädeutischer Unterricht vorangehen soll, ist eine in Deutschland schon frühzeitig erhobene Forderung, wenngleich die Meinungen darüber auseinandergehen, welche Zeit dieser Propädeutik einzuräumen ist. So bestand in Preußen nach dem Lehrplan von 1882 ein propädeutischer Unterricht in Quinta; 1892 ließ man ihn fallen; die neuesten Lehrpläne sind einer Propädeutik wieder günstiger, wenngleich ihr (an den Gymnasien) nur der erste Teil des Quartapensums zugestanden ist.

Wenn auch Simon in seiner scharf zugespitzten Weise gesagt hat: „Ein Lehrbuch in der Quarta halte ich für ein Verbrechen an den Schülern", so geben doch fast alle Lehrbücher einen kleinen Leitfaden für diese Vorstufe; daß die Einleitung sich in der Weise Euklids nur auf Begriffserklärungen beschränkt (Bahnson), steht heute fast vereinzelt da. Besonders eine gewisse Gruppe von Lehrbüchern, die durch eine allmähliche Überleitung von der induktiven Methode zur deduktiven charakterisiert ist, geht recht ausführlich auf die Propädeutik ein. Immerhin sind die meisten Darstellungen dieser Leitfäden, und ihnen schließen sich einige kurze, nur auf Definitionen und Aufgaben sich beschränkende selbständige Propädeutiken (z. B. Musmacher, Köstler und das ältere Buch von Diekmann — 1. Teil –) an, kaum geeignet, dem Außenstehenden ein vollständiges Bild von Zweck und Methode dieses Unterrichts zu geben. Gute Richtlinien gibt die Anleitung von Reidt[1]) und eine Anzahl ausführlicher Lehrbücher[2]).

Reidt gibt als Hauptaufgabe des propädeutischen Unterrichts an, „daß er die Schwierigkeiten beseitigen soll, welche der Eintritt in den wissenschaftlichen Unterricht den Anfängern bietet". Dieser Hinweis auf das Wissenschaftliche ist durch Reidts Auffassung vom Zweck der Mathematik überhaupt bedingt. Er betont, wie die Älteren es meist taten, fast nur den formalen Zweck und daneben die Heranbildung der Raumanschauung. Welche Stellung man nun auch zu dieser Frage nimmt,

1) l. c. pg. 175 ff.

2) Vergl. auch: M. Nath, Zur Methodik des geometrischen Anfangsunterrichts. Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. **36** (1905), 1.

man wird jedenfalls als erste Aufgabe der Propädeutik anzusehen haben: die Gewinnung der geometrischen Gebilde unter Anknüpfung an die Anschauungen des Schülers. Das Extremste, was in solcher Anknüpfung an die Anschauungen des Schülers geleistet werden kann, ist wohl die Raumlehre von Martin und Schmidt, die allerdings mehr für niedere Schulen bestimmt ist. Sie ist ein Beispiel für die Methode der „Formengemeinschaften". Es wird im ersten Heft vom Wohnort (Haus, Kirche, Dach, Turmuhr, Kirchenfenster) ausgegangen, im zweiten handelt es sich um Wald und Feld, im dritten um „Kulturstätten". (Z. B. wird an den Wandarm die Lehre vom Dreieck und den ein- und anbeschriebenen Kreisen, an den steinernen Sockel das Kubikwurzelziehen, an die Waschwanne die Behandlung der Ellipse angeknüpft.) Soweit auszuholen ist sonst nirgends üblich. Meist geht man von einem speziellen Körper, in der Regel vom Würfel aus (z. B. Holzmüller in seiner vorbereitenden Einführung u. v. a.). Nur selten ist das erste betrachtete geometrische Gebilde ein solches der Ebene; aber auch dann werden in diesem Gebiete meist ebene und räumliche Gebilde gemeinsam herangezogen; das zeige etwa an der Hand der Kapitelüberschriften der Lehrgang von Börner: Gerade, Kreislinie, Winkel, Würfel und Quadrat, das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck, die Symmetrie, Rhomboëder und Rhombus usf. Abweichend davon beschränken sich Diekmann, Dobriner und Lesser ganz auf die Ebene; Lesser bevorzugt die Ausführung ebener Zeichnungen. Dobriner gibt ein Kapitel über Kongruenz, in dem er durch Bewegung der Figuren Winkel, Strecken, Dreiecke usf. zur Deckung bringt und daraus — rein anschaulich — Sätze gewinnt.

Heute, wo der Lehrplan besonders an den Gymnasien für die Propädeutik nicht mehr soviel Zeit vorsieht wie früher, geht man meist sehr schnell von räumlichen zu ebenen Gebilden über (vergl. z. B. Reishaus, Vorschule). Immerhin zeigt die umfangreiche Einführung von Holzmüller, deren Stoff natürlich nur zur Auswahl in Frage kommt, wieweit einige zu gehen wünschen, begegnen wir doch hier schon dem Ikosaëder, „einigen Durchdringungen", ja sogar dem einschaligen Rotations-Hyperboloid.

Nach einer Seite hin hat die Propädeutik eine Weiterbildung erfahren. Man benutzt neuerdings immer mehr auch bewegliche Körper im Unterricht, man stellt demnach, wie Wienecke sagt, neben die bloße „Betrachtung" die „Beobachtung". Dann wird man aber nicht nur mit zeichnerischen Darstellungen der Körper sich begnügen und mit einigen starren Modellen auf dem Katheder, sondern wird die Tätigkeit der Schüler selbst zu Hilfe nehmen. Hierher gehört die Herstellung von Körpermodellen auf Grund von Netzzeichnungen, das Kneten von Körpern, das Papierfalten, das allerdings sich nirgends der weitgehenden Ausbildung erfreut wie etwa in Youngs Kleinem Geometer[1]), immerhin aber bei axialer

1) G. C. Young u. W. H. Young, Der kleine Geometer. Deutsch von S. u. F. Bernstein. Leipzig. (Teubner.) 1908.

Symmetrie oft angewandt wird. Hier greifen auch die Bestrebungen ein, einen fakultativen Handarbeitsunterricht an den höheren Schulen einzurichten.[1]) Als Beispiel, wie die Tätigkeit des Schülers im kleinen herangezogen wird, will ich einiges von der ersten Seite der Waltherschen Geometrie anführen. Da heißt es: Führe den Zeigefinger um die Ränder eines Heftes, längs der Tischkante, um einen Hutrand: Er beschreibt eine Linie. Zeige gerade und krumme Linien im Zimmer; zeichne sie in der Luft mit dem Finger nach. Bilde aus einem Bindfaden einen Kreis, eine Wellenlinie; spanne ihn zu einer geraden Linie aus. Schreite im Zimmer eine gerade Linie ab. Lege drei Federn nebeneinander in gerader Linie usf.

Zu einem Verständnis geometrischer Gebilde gehört auch, daß man sie zu messen versteht, daß man sie als Größen erkennt. Der Begriff der Größe ist für den Anfänger nicht etwas Selbstverständliches, und wenn in vielen Lehrbüchern der erste Satz gleich heißt: „Die Geometrie ist derjenige Teil der Mathematik, welcher die Lehre von den Raumgrößen umfaßt," so ist das ohne vorangegangene häufige Messungen der verschiedensten Art von Raumgrößen für den Schüler ein Satz ohne Inhalt. Recht vorteilhaft ist es, wenn sich hier der Mathematikunterricht auf den Rechenunterricht stützen kann, wenn der Schüler bereits von früh an beim Rechnen mit den üblichen Maßen praktisch vertraut ist. Wieweit man dann noch im propädeutischen Unterricht der Geometrie zu gehen hat, ob man z. B. mit Holzmüller bis zum Pythagoräischen Lehrsatz – natürlich rein durch Anschauung und praktisches Ausmessen gewonnen – vorgeht, ist bedingt durch die Verhältnisse insbesondere durch die vom Lehrplan zur Verfügung gestellte Zeit und wesentlich durch die Ansicht des Lehrers.

Von der Mehrzahl der Unterrichtenden wird nun dem propädeutischen Unterricht noch ein zweites Ziel zugeschrieben, er „muß allmählich die Methode ausbilden und sich im Verlaufe des Unterrichts immer mehr und mehr der strengen mathematischen Form anzuschließen bestrebt sein, so daß zwischen Einführungskursus und wissenschaftlichem Unterricht keine scharfe Grenze vorhanden ist, sondern ein unmerklicher Übergang stattfindet" (Börner). Nach dieser Anschauung hat also der propädeutische Unterricht auch die Aufgabe, die Schüler zu der spezifisch deduktiven Methode der Mathematik allmählich heranzuziehen, ihnen schrittweis eine Vorstellung von der Notwendigkeit und Nützlichkeit des mathematischen Beweises zu verschaffen und sie gleichzeitig mit dieser Methode vertraut zu machen. Wie man sich zu diesem Ziel der Propädeutik stellt, das ist wesentlich bestimmt durch die Auffassung, die man von der Rolle der Grundlagen in der Schule hat.

1) Vergl. darüber z. B. K. Giebel, Die Handarbeit in den höheren Knabenschulen. Pr. Oberrealschule Zeitz. 1909.

5. Die Grundlagen der Geometrie im Unterricht.

Beim Beweisen, d. h. bei der Zurückführung eines Lehrsatzes auf vorhergehende Lehrsätze, kommt man, wenn man irgendwo einmal anfangen will, auf Grundsätze, die man nicht mehr beweisen, d. h. auf frühere zurückführen, sondern als Ausgangspunkt wählen will, und ähnlich kommt man bei den Definitionen auf Grundbegriffe. Es ist noch eine andere in Hilberts Grundlagen[1]) zum Ausdruck kommende Auffassung möglich, daß nämlich die Grundbegriffe durch ein System von Grundsätzen festgelegt werden. Diese letztere Anschauungsweise kommt in den Schulbüchern, soweit ich sehe, nirgends deutlich zum Ausdruck, wir können also von ihr absehen. Über die den Schulbüchern zugrunde liegenden Anschauungen von den geometrischen Grundbegriffen gibt die vergleichende Planimetrie von H. Schotten[2]) eine bis 1890 reichende, ziemlich erschöpfende Übersicht.

Was nun in dieser Hinsicht die wirkliche Praxis des Lehrbuches anlangt, so ist zunächst auf den bei den meisten Lehrbüchern (eine Ausnahme machen z. B. der Leitfaden von Mehler in der neuen Bearbeitung von Schulte-Tigges, das Unterrichtswerk von Heinrich Müller, Bensemann) grassierenden „Einleitungsunfug" hinzuweisen. Da werden zunächst mehr oder weniger klare und ausführliche Begriffsbestimmungen gegeben dessen, was Wissenschaft, was Mathematik ist, was Geometrie, was ein Lehrsatz, ein Beweis, eine Konstruktion ist. Warum nicht gleich mit einem Abriß der formalen Logik beginnen? fragt da Bensemann mit Recht. Da lesen wir z. B. (Spiekers Geometrie) „der Forderungssatz (Postulatum) verlangt, etwas herzustellen, von dem nicht gezeigt zu werden braucht, wie es geschieht, denn das Verlangte gehört zu den unmittelbaren Grundvorstellungen", während sich doch der Schüler sagt, daß er unbedingt darüber unterrichtet werden muß, wie er mit Zirkel und Lineal umzugehen hat.

Was nun die Grundbegriffe selbst anlangt, so sind die Fälle, wo wie in einem alten Lehrbuche von K. W. Wiecke gesagt wird: „Jeder Mensch weiß, was Raum ist", oder wie in J. Helmes Elementarmathematik: „Die Gerade läßt sich nicht definieren" recht selten. Wohl durchgängig wird vom Raum ausgegangen, der Körper als begrenztes Stück des Raumes, die Fläche als Grenze des Körpers, die Linie als Grenze einer Fläche, der Punkt als Grenze einer Linie definiert bzw. beschrieben. Das steht in direktem Gegensatze zu jener Richtung der modernen Axiomatik, die umgekehrt vom Punkte ausgeht, dann die Gerade und die Ebene als neue Gebilde hinzunimmt oder die letztere oder auch beide vom Punkt aus definiert und schließlich die Begriffe Linie, Fläche durch

1) D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie. 3. A. Leipzig. (Teubner.) 1909.
2) H. Schotten, Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts. Eine vergleichende Planimetrie. 1. Bd. 1890. 2. Bd. 1893. Leipzig. (Teubner.)

einen Grenzprozeß aus den Ausgangsgebilden gewinnt. — Zuweilen wird in der Schulmathematik noch hinzugefügt „jeder Teil einer Linie, auch der kleinste, ist wieder eine Linie ... die Linie besteht daher nicht aus Punkten, ... obgleich in der Linie beliebig viele Punkte ... gedacht werden können". (Spieker, ähnlich Boymann, Kambly, Kambly-Roeder.) Hier gilt dann auch: „Jede Fläche im Raume, jede Linie in der Fläche, jeder Punkt in der Linie hat zwei Seiten"; man verzichtet also von vornherein auf einseitige Flächen u. dgl.

Eine bemerkenswerte Ausgestaltung hat Holzmüller diesem Kapitel in seinem Methodischen Lehrbuch gegeben. Bei den Grundbegriffen spielt schon überall das Unendliche hinein. Er warnt nun durch geeignete Beispiele vor voreiligen Schlüssen in dieser Richtung. Er bemerkt z. B., daß es mathematische Körper gibt, „die bis ins Unendliche reichen und doch einen endlichen, genau bestimmbaren Inhalt haben". Sein Beispiel dafür ist das folgende: Eine senkrechte quadratische Säule von 1 qm Grundfläche und 2 m Höhe wird in Schichten zerschnitten, derart, daß die Höhe der einzelnen Säulen 1, $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_8$, $^1/_{16}$, ... m ist. Die Anzahl dieser Schichten ist unendlich groß. Legt man jetzt diese Schichten statt übereinander in eine Reihe nebeneinander, so hat man einen bis ins Unendliche reichenden Körper, der doch den endlichen Inhalt von 2 cbm hat. — Es ist klar, daß derartige Beispiele — und Entsprechendes gilt für den Abschnitt über die Grundbegriffe allgemein — nicht gleich für den ersten Unterricht bestimmt sind, man darf eben beim mathematischen Schulbuche nicht „gleich von vorne anfangen" wollen.

Bezüglich der abgeleiteten Begriffe ist wieder auf Schottens Vergleichende Planimetrie zu verweisen. Man hat bekanntlich lange und heute noch nicht abgeschlossene Diskussionen über verschiedene Begriffe, beispielsweise den Winkel, geführt. Andere Begriffe haben bei den verschiedenen Verfassern verschiedene Bedeutung, ich nenne als Beispiel den Begriff der ebenen Figur. Die enger Definierenden verstehen darunter nur die geschlossene Figur der weiter Definierenden.

Auf die Frage, wie der Unterricht die Axiome einführen soll, scheinen mir[1]) drei Antworten möglich:

1. Den Schülern wird ein vollständiges Axiomensystem geboten.
2. Man stellt die Axiome nicht auf, gibt vielmehr ihren Inhalt in dem propädeutischen Kurs.
3. Man sucht sich einige Axiome heraus, die man besonders als solche ausspricht.

1) W. Lietzmann, Eine französische Rundfrage über den geometrischen Anfangsunterricht. Pädagogisches Archiv. 50 (1908). — Über die im folgenden vergleichsweise herangezogenen außerdeutschen Länder vergleiche man z. B. den Anhang in F. Klein, Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Teil II. Geometrie. Ausgearbeitet von E. Hellinger 1909. Leipzig. (Teubner). Speziell über Italien unterrichtet der dort zitierte Aufsatz von W. Lietzmann, die Grundlagen der Geometrie im Unterricht (mit besonderer Berücksichtigung der Schulen Italiens). Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 39 (1908), pg. 177.

Im Falle 2 und 3 sind dann 3 Arten des weiteren Fortschreitens im Unterricht möglich, entweder man geht a) rein deduktiv, b) vom Induktiven allmählich zum Deduktiven überführend, c) (das kommt nur für 2 in Betracht) auch weiter rein induktiv vor.

Fall 1, der in Italien fast die Regel bildet, in Frankreich sich z. B. bei Méray[1]), in Amerika bei Halsted[2]) findet, kommt bei uns meines Wissens in keinem geometrischen Schulbuch vor. Das jüngst als Ersatz für den alten Baltzer erschienene Lehrbuch von Thieme[3]), das ein vollständiges Axiomensystem enthält, ist für den Lehrer bestimmt. Da bei uns der Geometrieunterricht sehr früh liegt, wäre ein solcher Lehrgang auch nicht möglich. Die Fälle 2a und 3a dürften heute in Praxis und Lehrbuch die häufigsten sein, die Anhänger der Reformbewegung neigen zum größten Teil 2b, wohl auch 3b zu; der Weg 2c, den z. B. Perry in seinem für Arbeiter geschriebenen Practical Mathematics einschlägt, kann zwar für Primärschulen und Fachschulen eine gewisse Berechtigung haben, dürfte aber für unsere höheren Schulen nicht in Betracht kommen.

Es ist nötig, noch einen Augenblick bei der Auswahl von Axiomen, welche die Gruppe 3 trifft, zu verweilen. Man hat leider nur zu oft den Eindruck, daß die Verfasser nicht mit der Entwicklung der modernen Axiomatik vertraut sind. Das zeigt meines Erachtens auch recht deutlich ein Aufsatz von Wolff[4]), der eine Zusammenstellung solcher Axiomenauswahlen gibt. In der Tat sind J. Frischauf[5]), absolute Geometrie nach J. Bolyai, Paschs Vorlesungen über neuere Geometrie[6]), Stäckel und Engel, Theorie der Parallellinien[7]), fast gar nicht, Hilberts Grundlagen erst sehr spät in weiteren Lehrerkreisen bekannt geworden, obwohl doch alle diese Werke für eine Orientierung über diese Fragen außerordentlich gut geeignet waren. Erst neuerdings lassen Werke, wie die Enzyklopädie der Elementarmathematik von Weber-Wellstein[8]), die Bücher von Bonola-Liebmann[9]), von Thieme[10]), die Elementar-

1) Ch. Méray, Nouveaux Éléments de Géométrie. 3. Éd. Dijon. (Jobard.) 1906.

2) G. B. Halsted, Rational Geometry. New-York. 1904.

3) H. Thieme, Die Elemente der Geometrie. Aus: Grundlehren der Mathematik. 2. Teil. 1. Bd. Leipzig. (Teubner.) 1909.

4) Über die Grundlagen unserer Schulgeometrie. Lehrproben und Lehrgänge 1908. Heft 1.

5) J. Frischauf, Absolute Geometrie nach Joh. Bolyai. Leipzig. (Teubner.) 1872.

6) M. Pasch, Vorlesungen über neuere Geometrie. Leipzig. (Teubner.) 1882.

7) P. Stäckel und F. Engel, Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauß. Leipzig. (Teubner.) 1895.

8) H. Weber und J. Wellstein, Enzyklopädie der Elementarmathematik. 1. Band: Enzyklopädie der elementaren Algebra und Analysis. 2. A. 1906. 2. Band: Elemente der Geometrie. 2. A. 1907. 3. Band: Angewandte Elementar-Mathematik 1907. Leipzig. (Teubner.)

9) R. Bonola, Die nichteuklidische Geometrie. Deutsch von H. Liebmann. Leipzig. (Teubner.) 1908.

10) Vergl. die eben zitierten Elemente der Geometrie.

mathematik vom höheren Standpunkte aus von Klein[1]) einen Umschwung erhoffen.

Sehr viele, ja man kann sagen fast alle Lehrbücher, geben, häufig in der Einleitung, die κοιναὶ ἔννοιαι des Euklid; dabei wechselt die Zahl der angeführten (arithmetischen) Axiome sehr stark; bei Sassenfeld sind es nur zwei (zwei Größen, die einer dritten gleich sind, sind sich selbst gleich; Gleiches zu Gleichem addiert oder von Gleichem subtrahiert gibt Gleiches); dann sind alle Zahlen vertreten bis zu zwölf in Koppe-Diekmanns Geometrie, wo beispielsweise „Gleiches zu Ungleichem addiert gibt Ungleiches“ und „Ungleiches zu Gleichem addiert gibt Ungleiches“ als verschiedene Axiome ausgesprochen werden.

Die Zahl der geometrischen Axiome ist gleichfalls recht schwankend. Zuweilen findet sich (z. B. bei Koppe-Diekmann) nur das Parallelenaxiom als Grundsatz ausgesprochen, natürlich aus dem Grunde, daß gerade dieses Axiom in der Geschichte der Axiomatik die Hauptrolle gespielt hat. Lieber und von Lühmann folgern das Parallelenaxiom, obwohl sie einige planimetrische Grundsätze anführen, aus einem rein anschaulich gewonnenen Satz. Heinrich Müller spricht das Axiom unmittelbar als (Anschauungs-)Satz aus; dabei ist zu bemerken, daß bei ihm die Bezeichnung als „Satz“ formal deshalb berechtigt erscheint, weil er, wie wir später noch auszuführen haben, den Satz von der Winkelsumme im Dreieck vorwegnimmt. Von da aus ließe sich das Parallelenaxiom beweisen; es dann als Grundsatz auszusprechen, wie es z. B. Sassenfelds Hauptsätze tun, erübrigt sich für den, der sich rein auf den systematischen Standpunkt stellt; für den Methodiker kann es trotzdem geboten erscheinen. Kambly-Roeder fügt dem eigentlichen Parallelenaxiom offenbar aus didaktischen Gründen noch den (kinematischen) Grundsatz hinzu: „Wenn man eine Gerade parallel zu sich selbst verschiebt, ändern sich die Winkel, welche sie mit einer anderen Geraden bildet, ihrer Größe nach nicht“. Vom Üblichen abweichend ist die Fassung des Axioms bei Boymann; er hat die beiden Axiome: „Schneiden sich zwei Gerade, so läßt sich die eine nicht ohne Drehung in die Lage der anderen bringen“ und „Schneiden sich zwei unbegrenzte Gerade, so läßt sich die eine nicht ohne Drehung in eine solche Lage bringen, daß sie die andere nicht mehr schneidet“. Focke-Kraß operiert mit dem Axiom: „Wenn eine unbegrenzte gerade Linie durch einen zwischen den Schenkeln eines hohlen Winkels liegenden Punkt gezogen wird, so durchschneidet sie wenigstens einen Schenkel des Winkels“. Inwieweit der Richtungsbegriff in den Parallelentheorien der Schulbücher eine Rolle spielt, ist bei H. Schotten eingehend untersucht; hier sei nur als Beispiel der in den Grundlagen allerdings völlig unzuverlässige alte Kambly angeführt, der den Grundsatz anführt: „Wenn

[1]) F. Klein, Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Teil II. vergl. das frühere Zitat.

zwei gerade Linien in einer Ebene so liegen, daß sie, wieweit man sie auch verlängere, einander nie schneiden, so haben sie dieselbe Richtung". „Bewiesen" wird das Parallelenaxiom bei H. Seeger, und zwar gibt der Verfasser den Bertrandschen Beweis, der überhaupt mehrfach in ältere Auflagen von Lehrbüchern übergegangen ist.

Die außer dem Parallelenaxiom, das allein wir hier als Beispiel eingehender behandeln konnten, noch besonders ausgesprochenen Grundsätze sind oft wahllos zusammengestellt, ihre Zahl wechselt stark. So findet sich häufig als Grundsatz angeführt (Lieber-von Lühmann und Kambly, der allerdings auf eventuelle Bedenken hinweist), daß zwischen zwei Punkten die Gerade der kürzeste Weg ist. Das sogenannte archimedische Axiom (bei Euklid in einer Definition) wird selten zitiert (Helmes z. B. bringt es unter den arithmetischen Axiomen).

Die Frage, welche Axiome auf der Schule ausdrücklich zu formulieren sind, natürlich vorausgesetzt, daß man überhaupt den Weg 3 einschlägt, hat exakt meines Wissens bisher nur H. Thieme beantwortet. Er sagte in seinem Vortrage auf dem dritten Internationalen Mathematiker-Kongreß[1]: „Im Anfangsunterricht werden wir von den Grundsätzen nur die von Hilbert so bezeichneten der Verknüpfung und das Parallelenaxiom ausdrücklich als solche hinstellen. Von den Axiomen der Anordnung, der Kongruenz und der Stetigkeit werden wir wie bisher zunächst Gebrauch machen, ohne sie besonders aufzuführen".

F. Reidt, H. Schotten und A. Thaer, besonders aber neuerdings Thieme sind nachdrücklich für eine Berücksichtigung der Axiomatik auf der Oberstufe eingetreten[2]). In den Lehrbüchern finden sich in dieser Hinsicht bisher nur ganz geringfügige Ansätze. So bringt Pietzker in seinem Lehrgang einen „Rückblick auf die Grundlagen der Geometrie", in dem aber, trotzdem eine objektive Darstellung versucht wird, doch die bekannte Gegnerschaft Pietzkers zur modernen Axiomatik zum Ausdruck kommt. Schwering und Krimphoff sprechen sich in einer Schlußbemerkung über die Axiomatik aus, führen aber nur drei Axiome an: Der Raum ist dreidimensional, kongruent, eben (im Sinne Riemanns). H. Thieme sagt: „Auf der Oberstufe, bei Gelegenheit des stereometrischen Unterrichts werden wir auf die Notwendigkeit dieser Axiome der Verknüpfung (s. oben) hinweisen. Ein vollständig durchgeführtes exaktes System der Lehren der Geometrie ist auch auf der Oberstufe nicht möglich; die verfügbare Unterrichtszeit ist für näherliegende Dinge notwendig".

Ob auf unseren Schulen auch die nichteuklidische Geometrie Berücksichtigung zu erfahren hat, ist eine noch recht wenig diskutierte Frage. Von Lehrbüchern gehören hierher die Elemente von Simon, welche

1) H. Thieme, Wirkung der wissenschaftlichen Ergebnisse auf den Unterricht in der Elementarmathematik. Verhdl. des III. Intern. Mathematiker-Kongresses in Heidelberg 1904. Leipzig. (Teubner.) 1905.

2) H. Thieme, Die Umgestaltung der Elementar-Geometrie. Prgr. No. 175. Berger-Oberrealschule Posen 1900.

die absolute Geometrie berücksichtigen; ob dieses Buch mehrfach in der Unterrichtspraxis erprobt ist, entzieht sich meiner Kenntnis. Eine Darstellung des Begriffes der Unabhängigkeit der Axiome ist im Unterricht der Prima sehr wohl möglich[1]), wenn man sich dabei auf einfache Fälle beschränkt, z. B. solche, die sich bei den Axiomen der Verknüpfung ergeben. Für die Diskussion nichteuklidischer Geometrien im Unterricht hat sich A. Thaer ausgesprochen[2]). Dagegen rät Klein (Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus; Bd. II) dringend davon ab, im regulären Schulunterricht (d. h. außer gelegentlichen Andeutungen auf Veranlassung interessierter Schüler) nichteuklidische Geometrie zu bringen.

An dieser Stelle sei kurz auch auf die Verbindung der Mathematik mit der philosophischen Propädeutik hingewiesen. In Preußen sind der philosophischen Propädeutik gegenwärtig keine besonderen Stunden eingeräumt. Damit ist aber nicht gesagt, daß nun die Philosophie ganz aus unseren Schulen verbannt ist. Vielmehr hat jetzt jedes Fach an seinem Teil die Aufgabe, philosophischen Fragen in seinem Gebiete näher zu treten: Die philosophische Propädeutik ist nicht mehr Unterrichtsfach, sie werde also, um einen Ausdruck von Gille[3]) zu gebrauchen, Unterrichtsprinzip.

Hier, wo es sich um die Grundlagen der Mathematik handelt, begnüge ich mich, zwei für Schüler bestimmte Bücher anzuführen, die auf diese Frage eingehen, insbesondere auch auf das Verhältnis deduktiver und induktiver Methode. Das philosophische Lesebuch von B. Schmid[4]) vereinigt eine größere Anzahl Abschnitte aus philosophischen Schriften und ist so recht für den Mathematiker und Naturwissenschaftler zusammengestellt. Von der philosophischen Propädeutik auf naturwissenschaftlicher Grundlage von A. Schulte-Tigges[5]) kommt besonders der erste Teil, die Methodenlehre, in Betracht.

6. Das System.

Wenn die Grundlagen auf irgendeinem Wege gewonnen sind, so baut sich nun darauf ein System von Tatsachen auf, das sich in einzelne, mehr oder weniger genau umgrenzte Kapitel gliedert, die dann

1) W. Lietzmann, Die Grundlagen der Geometrie im Unterricht. Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht **39** (1908), pg. 177.

2) A. Thaer, Ist die nichteuklidische Geometrie auf der Schule zu berücksichtigen? Lehrproben und Lehrgänge **61**, 1: „Der Primaner muß erfahren, daß Axiome Annahmen sind und nicht Tatsachen!"

3) A. Gille, Unterrichtsfach oder Unterrichtsprinzip? Lehrproben und Lehrgänge. Heft **74** (1903), 17.

4) B. Schmid, Philosophisches Lesebuch. Zum Gebrauch an höheren Schulen und zum Selbststudium. Leipzig. (Teubner.) 1906.

5) A. Schulte-Tigges, Philosophische Propädeutik auf naturwissenschaftlicher Grundlage. 2. A. Berlin. (Reimer.) 1904.

in allen Lehrplänen uns entgegentreten. Ehe wir auf die methodischen Gesichtspunkte eingehen, die bei der Behandlung dieser Tatsachenkomplexe im Unterricht und daher auch im Lehrbuch Anwendung finden, sei eine kurze Kennzeichnung dieser in fast unveränderter Reihenfolge in beinahe allen Schulbüchern wiederkehrenden Abschnitte vorausgeschickt, zunächst soweit sie der Unterstufe angehören. Eine mehr für den Lehrer bestimmte Darstellung des Systems bringt eine ganze Reihe umfangreicherer Werke z. B. von Baltzer, J. C. Becker, Rausenberger, Schlömilch, und die neuen, dem gegenwärtigen Stande der wissenschaftlichen Forschung Rechnung tragenden Elemente von Thieme, die ein vollständiges System der gesamten Elementargeometrie bieten. Von diesen Büchern haben übrigens Baltzers Elemente und Schlömilchs Geometrie des Maßes auch als Schulbücher Verwendung gefunden. Genannt sei ferner V. Schlegel, der in seinem System der Raumlehre den Stoff der Elementarmathematik nach den Prinzipien der Graßmannschen Ausdehnungslehre behandelt, während er in seinem Lehrbuch der elementaren Mathematik „wegen der derzeitigen Schulverfassung“ Graßmanns Lehre wieder verläßt, sich aber unter Festhalten am alten Lehrstoff möglichst der neuen Geometrie anpaßt. Eine durchaus moderne Systematik der Geometrie unter Verwendung der Gruppentheorie als Einteilungsprinzip gibt Kleins Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus (Bd. II.) Handelt es sich hier um einen „Gesamtüberblick über das Gebiet der Geometrie“, so kann man eine Übersicht über den Stand der Einzelprobleme in der Elementargeometrie an der Hand der sehr umfangreichen Literatur-Zusammenstellung von M. Simon[1]) gewinnen.

An der Spitze des Systems steht die Dreieckslehre. Hier werden etwa Sätze über die Seiten und Winkel des Dreiecks, über Kongruenz und über besondere Arten von Dreiecken (gleichschenklige, rechtwinklige) behandelt.

Die Abhängigkeit des Satzes über die Winkelsumme im Dreieck von der Parallelentheorie hat drei verschiedene Anordnungen der Sätze zur Folge gehabt.

Schon die älteren Lehrbücher der Mathematik (z. B. Helmes, Wittstein und Kambly) stellten im Interesse eines organischen Aufbaues und Systemes im Gegensatz zu Euklid die Parallelentheorie vor die Dreieckslehre, und danach handelt heute noch fast die gesamte Schulliteratur. Man kann dann die Dreieckslehre sofort mit dem Winkelsatz beginnen.

Später sind einige aus methodischen Gründen wieder zu der Weise Euklids zurückgekehrt; sie bringen die Parallelentheorie erst, nachdem der ganze von ihr unabhängige Teil der Dreieckslehre abgehandelt ist. Der Winkelsatz steht dann ziemlich weit hinten. So treffen wir z. B. in

1) Vgl. die bereits (Abschnitt 2) zitierte Entwicklung der Elementargeometrie.

Thiemes Leitfaden zunächst auf die beiden ersten Kongruenzsätze und das gleichschenklige Dreieck, erst dann auf die Parallelenlehre.

Eine dritte Gruppe geht noch weiter, allerdings auf Kosten der Strenge. Sie beweist den Satz von der Winkelsumme scheinbar ohne Parallelenlehre. Es gibt da zwei Methoden. Die eine bedient sich des sogenannten Thibautschen Beweises. Man läßt etwa einen Schüler von einem Eckpunkt des auf den Fußboden gezeichneten Dreiecks aus auf den Seiten das ganze Dreieck umschreiten. Dann hat er, zum Ausgangspunkt und zur Ausgangsrichtung zurückgekehrt, eine volle Umdrehung gemacht; mit anderen Worten, die Summe der Außenwinkel ist = 4 R. Jetzt läßt sich der gewünschte Beweis leicht erbringen. Dieser Art verfahren z. B. Bensemann, Heinrich Müller und Sassenfeld. Das gleiche Ziel erreicht man mit dem sogenannten Schrumpfungsbeweis, der, wie bei Schwering-Krimphoff, zumeist in Zusammenhang mit dem von Thibaut gebracht wird. Man zeigt dem Schüler, daß es bei dem ganzen Vorgang gar nicht darauf ankommt, wie groß das Dreieck ist, wenn nur die Winkel dieselben bleiben. Denkt man sich jetzt die Seiten sehr klein, so schrumpft das Dreieck in einen Punkt, die Summe der Außenwinkel in die Summe der Winkel um einen Punkt herum zusammen. – Natürlich zeigt sich später beim sphärischen Dreieck, daß beide Beweise nicht stichhaltig sind. — Die Ausführungen können gleichzeitig als ein erstes Beispiel für den Gegensatz zwischen zwei Richtungen unter den Mathematiklehrern dienen, auf die im nächsten Abschnitt noch weiter einzugehen ist.

Auf die Dreieckslehre folgt die Lehre vom Viereck mit starker Betonung des Parallelogrammes. Man läßt dann einen Teil der Kreislehre folgen, soweit sie hier schon zu erledigen ist, also etwa Punkt und Kreis, Gerade und Kreis, Winkel und Kreis, Dreieck sowie Viereck und Kreis, Kreis und Kreis. Wie weit im einzelnen zu gehen ist, darüber besteht nicht Übereinstimmung. Bringt doch z. B. Boymann und ebenso Schuster in seiner konstruktiv-analytischen Planimetrie hier schon den Feuerbachschen Kreis (d. h. den durch die Fußpunkte der Höhen, durch die Mitten der Dreiecksseiten und die Mitten der oberen Höhenabschnitte eines Dreiecks gehenden Kreis.) Andererseits schiebt Bensemann einen Abschnitt über die wichtigsten Eigenschaften des Kreises (Kreis und Gerade, zwei Kreise) vor die Konstruktionen und Kongruenzbetrachtungen der Dreiecke, „da ja die Dreieckskonstruktionen durchweg der Kreise bedürfen“.

Ältere Lehrbücher, wie die von Helmes, Wittstein und auch Schlömilch, ordnen die Kreislehre aus Gründen der Systematik später ein, nämlich hinter die Flächenlehre. Man unterscheidet hier meist zwei Abschnitte, die man mit Koppe-Diekmann als geometrische und arithmetische Quadratur bezeichnen kann. Selten sind beide Abschnitte ineinander gearbeitet, wie z. B. im alten Kambly und bei Lieber und von Lühmann. In dem ersten Kapitel, dessen natürlicher

Mittelpunkt der Pythagoräische Lehrsatz ist, wird die Zerlegungsgleichheit ebener, geradlinig begrenzter Figuren untersucht, angeschlossen werden sogenannte Umwandelungsaufgaben z. B. eines Rechtecks in ein Quadrat bei invariantem Flächeninhalt. Diesem Abschnitt geht dann ein entsprechender über Flächenberechnung parallel.

Es folgt die Ähnlichkeitslehre. Man hat hier etwa drei Abschnitte: Erstlich wird die Proportionalität an Geraden untersucht, wobei meist der sogenannte Strahlensatz zum Ausgangspunkt genommen wird. (Werden die Schenkel eines Winkels von Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf dem einen Schenkel wie die entsprechenden auf dem andern). Dann beschäftigt man sich mit der Ähnlichkeit von Dreiecken, und schließlich werden Proportionen am Kreis behandelt. In seltenen Fällen – einige Realschulen Berlins tun es lehrplanmäßig – wird gleich hier ein Abschnitt über harmonische Punktreihen und Strahlen angeschlossen. Dobriner hat in seinem Leitfaden den Versuch gemacht, die Ähnlichkeitslehre aus der Flächenlehre herzuleiten, hat jedoch nicht Anklang gefunden.

Zum Abschluß des Pensums der Unterstufe fehlt noch ein Kapitel über Kreisberechnung. Man geht in der Weise Archimeds von den regulären Polygonen aus und bestimmt so den Kreisumfang durch Angabe einer oberen und unteren Grenze.[1] Meist fügen die Lehrbücher noch ein Kapitel über sogenannte algebraische Geometrie an (bei Bork-Nath tritt dieses Kapitel in vorbildlicher Weise nur in einer Methodik der Konstruktionsaufgaben auf). Es handelt sich hierbei nicht etwa um Methoden der analytischen Geometrie, vielmehr um die Konstruktion algebraischer Ausdrücke im Sinne der griechischen Mathematiker, also z. B. von $\frac{a \cdot b}{c}$ oder $\sqrt{a^2 - b^2}$.

Die eben gegebene Gliederung schließt in der Hauptsache an die zur Betrachtung kommenden Figuren an. Auf organische Gliederung Wert legende Lehrbücher haben, auch wenn sie im großen und ganzen den eben gekennzeichneten Weg einschlagen, zuweilen eine andere Disposition. Die Elementargeometrie „ist nicht und will nicht sein", sagt Seeger, „eine Geometrie des Dreiecks, oder des Sehnenvierecks oder des Kreises. Sie kann sich überhaupt nicht darauf einlassen, die Eigenschaften irgend einer speziellen Figur auch nur einigermaßen erschöpfend zu untersuchen. Die Elementargeometrie stellt sich vielmehr keine anderen Aufgaben als die, den Schüler mit den Grundzügen der Kongruenz-, Ähnlichkeits- und Kollineationslehre und mit den am näch-

1) Dabei wird übrigens fast niemals das Verdienst des Archimedes richtig hervorgehoben. Fast überall findet sich der Wert $\pi = \frac{22}{7}$, während Archimedes in seiner „Kreismessung" mit der Ungleichung schließt

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}.$$

(Vergl. Cantor, l. c. Bd. 1. pg. 301.)

sten liegenden Anwendungen dieser drei Lehren bekannt zu machen". Uth gliedert den Stoff in 1. Absolute Gleichheit und Ungleichheit; 2. Relative Gleichheit (d. h. Ähnlichkeitslehre); 3. Geometrie der Lage.

7. Deduktive und induktive Methoden.

Im mathematischen Unterricht unterscheidet man ganz allgemein zwei Methoden, die didaktische oder dogmatische Methode und die heuristische Methode. Die extremste Form der dogmatischen Methode ist die Einpaukmethode. Reidt schildert nach einem wirklichen Fall den nach ihr erteilten Unterricht etwa so: In der ersten Stunde wird Lehrsatz 1 durchgenommen und zu häuslicher Aneignung aufgegeben. In der zweiten Stunde sagen sämtliche Schüler den Lehrsatz mit Beweis wörtlich her; wer ihn kann, erhält den Auftrag, das nächste Mal den 2. Lehrsatz einzuüben, die anderen erhalten den 1. Lehrsatz zur nächsten Stunde wieder auf. In gleicher Weise wird in allen Stunden fortgefahren.

Schotten fügt aus seiner Schulzeit einen anderen Fall hinzu, in dem sogar seitenweise auswendig gelernt wurde; also Lehrer: Was steht auf Seite 71? Schüler sagt das her (bzw. liest es ab). Dann wieder vom Lehrer die klassischen Worte: „Solches alles stehet auf Seite 71: — Was steht auf Seite 72?" Derartiger Unterricht wird schon vor 40 bis 50 Jahren eine Monstrosität gewesen sein. Dagegen wird die didaktische Methode, wie sie beispielweise der Universitätsunterricht befolgt, gelegentlich wohl noch heute einmal in den Oberklassen bei dem einen oder anderen Kapitel von einzelnen Lehrern angewandt. Immerhin wird heute wohl kaum noch ein Lehrer zu finden sein, der nicht meistens heuristisch verfährt, d. h. durch ein stetes Frage- und Antwortspiel die Schüler an der Durchnahme des neuen Stoffes beteiligt. Es ist hier nicht der Ort, an der Hand von Beispielen das zu erläutern, vielmehr sollen nur einige allgemeine Gesichtspunkte besprochen werden, die aus der heuristischen Unterrichtsmethode heraus für die Gestaltung des Lehrstoffes auch im Lehrbuche maßgebend waren.

Es gibt eine Anzahl Lehrbücher, die das Wort heuristisch im Titel führen, ohne doch diese Methode zu befolgen, beispielsweise der Leitfaden von I. A. Matthias, wenigstens in seinen Neubearbeitungen. Ein gleiches ist von Behl's Planimetrie zu sagen: Hier wird zwar im Titel von induktiver Methode gesprochen, im ganzen Buch wird aber nirgends induktiv (im üblichen Sinne des Wortes) verfahren, vielmehr sollte es besser heißen heuristisch. Dieses heuristische Element beschränkt sich nun aber darauf, daß bei den einzelnen Sätzen in der Reihenfolge Voraussetzung, Beweis, Behauptung, Lehrsatz vorgegangen wird. Das wichtigste Moment, wie man dazu kommt, gerade auf diese oder jene Tatsache „im Beweise" zu achten, fehlt aber; wenn der Lehrsatz voransteht, so ist wenigstens ein Richtung gebendes Moment da,

hier fehlt das ganz. Man kann wohl sagen, daß tatsächlich vollständig heuristisch verfahrende Bücher überhaupt nicht existieren, hier handelt es sich eben um einen Vorzug des direkten mündlichen Meinungsaustausches, der dem Lehrbuch abgeht.

Zunächst sei der Gegensatz und auf der anderen Seite auch das Hand-in-Hand-Gehen des deduktiven und des induktiven Momentes im mathematischen Unterricht gekennzeichnet. Man kann in dieser Beziehung heute zwei ziemlich unvermittelt[1]) einander gegenüber stehende Ansichten konstatieren. Die eine läßt sich dahin charakterisieren, daß sie auf der Grundlage eines gewissen mehr oder weniger propädeutisch übermittelten Fundaments in strenger lückenloser Deduktion ein System von Lehrsätzen aufgebaut wissen will. Dieses System wird dann durch geeignete Übungssätze, durch Aufgaben, durch praktische Anwendungen weiter in die Breite geführt. Die gegenteilige Ansicht verteidigt demgegenüber zumal in den ersten Teilen ein rein anschauliches, induktives Verfahren bei der Aufstellung der Lehrsätze, für die späteren Teile wünscht sie eine allmähliche Überleitung von der reinen Induktion der Propädeutik zu der deduktiven Methode der reinen Mathematik. Unter Induktion verstehen wir dabei in dem der Geometrie gewidmeten Abschnitt immer das Verfahren, aus der Anschauung einer oder mehrerer Figuren auf allgemeine geometrische Tatsachen zu schließen. Auf eine strenge Grundlegung der Geometrie muß allerdings, wie wir schon gesehen haben, auch die deduktive Richtung verzichten: „Nicht sowohl die Legung oder Befestigung des Fundaments als der sichere Aufbau der Wissenschaft auf gegebenem Fundament ist die nächste Aufgabe des Unterrichts." (Helmes.) Aber davon abgesehen sind die älteren ausführlichen Lehrbücher z. B. von Helmes und Wittstein bestrebt, in dieser Weise den gesamten Lehrstoff „streng wissenschaftlich" zu behandeln.

Bei dieser ganzen Frage spielen die Ansichten über den Zweck des Unterrichtes eine wesentliche Rolle. Es gab eine Zeit, in der der praktische Zweck des mathematischen Unterrichts ganz und gar zurücktrat. Man erklärte: die Mathematik „lediglich ihres praktischen Nutzens wegen in unsere Schulen zu ziehen, würde eine Verkennung ihrer Würde sein." (Wittstein.) Nur der formale Zweck der Geistesbildung[2]) ist ausschlaggebend: „Es dürfte wohl kaum eine Übertreibung sein", sagt wieder Wittstein, „wenn man behaupten wollte, daß ein ... Schüler in seinem späteren Leben den gesamten mathematischen Lehrstoff ohne Schaden vergessen dürfe, und der Erfolg wird dennoch bleiben." Heute wird

1) Das sieht man z. B. recht deutlich bei der Bearbeitung der Reidtschen Anleitung durch Schotten: Verfasser und Bearbeiter stehen in dieser Hinsicht auf vollkommen entgegengesetztem Standpunkte.

2) Eine moderne Behandlung des formalen Zweckes der Mathematik gibt A. Jakobs, Was leistet der Mathematikunterricht für die Erziehung zur Wissenschaft? Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. **39** (1908), 625.

wohl allgemein der praktische Nutzen der Geometrie nicht mehr über die Achseln angesehen (vergl. Abschnitt 13); die Folge davon ist, daß neben das System, das an Zahl der Lehrsätze immer mehr abnimmt und sich nur auf das Skelett des Wesentlichen beschränkt, jetzt auch die praktische Anwendung getreten ist. Von dem Umfang und dem Aufbau eines solchen Skelettes von Sätzen geben die beste Vorstellung die systematischen Leitfäden, die in großer Zahl verbreitet sind.

Die kurzen Systeme dieser Leitfäden haben oft Anlaß gegeben zu der Annahme, der nach ihnen erteilte Schulunterricht bediene sich der didaktischen Methode. Das ist ganz und gar nicht der Fall, der Leitfaden gibt eben dem Schüler für seine häusliche Arbeit nur Fingerzeige für das Wesentliche, er will in keiner Weise den Unterricht ersetzen. — Schlagen wir dagegen systematische Lehrbücher auf, so finden sich zuweilen recht deutliche Hinweise auf die unterrichtliche Methode.

Die Vertreter der deduktiven Methode stehen natürlich auf dem Standpunkt, daß es nicht so sehr auf den Inhalt der einzelnen Lehrsätze ankommt, als vielmehr auf die Beweismethoden. Nicht Beweise sollen die Schüler lernen, sondern das Beweisen. Reidt nennt die Methode, welche dies Ziel zu erreichen sucht, die analytische Methode. Man gibt sich davon Rechenschaft, welche Tatsache, welcher Lehrsatz in einem gegebenen Falle eines Beweises zum Ziel geführt hat, und wendet das in entsprechenden anderen Fällen an.

Als ein älteres Beispiel für diese Methode führe ich die Elemente der Stereometrie von Kretschmer an, wenn auch dieser methodische Leitfaden dem Stoff nach noch nicht hierher gehört. Wenn es sich dort z. B. um den Satz handelt: „Der Neigungswinkel zwischen einer Ebene und einer durchschneidenden Geraden ist der kleinste Winkel, welchen die Gerade mit den durch ihren Fußpunkt in der Ebene gezogenen Geraden bildet," so wird im Beweis zuerst gefragt: Welcher Satz lehrt zwei beliebige Winkel, die nicht in demselben Dreieck liegen, vergleichen?

Diese Methode ist dann von Späteren systematisch ausgebaut worden. Auf Anregungen von W. Krumme geht das Lehrbuch von H. Fenkner zurück. Es gibt eine Anzahl sogenannter Beweismittel an; so heißt es z. B. „Um die Gleichheit zweier Winkel zu beweisen, kann man zeigen, daß sie dieselben Supplement- oder Komplementwinkel haben" oder „Um die Gleichheit zweier Winkel nachzuweisen, bringt man sie durch Ziehen von Hilfslinien in zwei Dreiecke und beweist deren Kongruenz". Bei dem Beweis der einzelnen Sätze wird dann angegeben — im Unterricht hat das natürlich der Schüler selbst zu finden, — welches Beweismittel anzuwenden ist; manchmal ergeben sich dabei auch mehrere Wege. In gleicher Weise, doch in größerer Anzahl als Fenkner, der in der Planimetrie insgesamt nur 7 Beweismittel hat, gibt auch Heinr. Müller dem Schüler Beweismittel an die Hand. Selbstverständlich übt diese analytische Methode das Beweisen in ausgedehntem Maße an Übungs-

sätzen; aus diesem Grunde enthalten die meisten Übungsmaterial bietenden Bücher geeignete Übungssätze in reicher Auswahl (vergl. z. B. Gandtner und Junghans).

Eine große Rolle spielt bei der Analyse eines Beweises die Figur, daher lieben es einige Lehrbücher (vergl. z. B. das von Schwering-Krimphoff), dem eigentlichen Beweise einen Hinweis auf die Entstehung der Figur voranzustellen. Der Beweis wird sich durch Betrachtung der Figur und durch Diskussion etwa zu ziehender Hilfslinien herausfinden lassen. Damit wird die Figur von einer bloßen Stütze des Gedächtnisses, wie sie es früher wohl gewesen, zu einem heuristischen Prinzip, und man begreift, daß man in neuerer Zeit auch auf Seiten der deduktiven Gruppe immer mehr Wert legt auf eine exakte Ausführung der Figuren.

Bei dieser Gelegenheit sei eine methodische Bemerkung eingefügt, die an etwas sehr Äußerliches anschließt. Die älteren Lehrbücher vereinigten zum allergrößten Teile die Figuren und Tafeln am Schlusse des Buches; neben der Art der Herstellung war dafür maßgebend, daß „die Schüler die Figuren während der Lektion benutzen können, ohne den Text vor Augen zu haben". (Kambly.) Wenn heute fast alle Lehrbücher von diesem Gebrauch abgekommen sind, so liegt das nicht nur an der einfacheren Herstellungsweise der Figuren, sondern auch daran, daß man auf die Benutzung der Lehrbuchfiguren im Unterricht gänzlich verzichtet. Der Schüler zeichnet selbst entweder in sein Heft oder an die Tafel die nötigen Figuren.

Den Anhängern der Deduktion wird von den Induktiven der Vorwurf der Beweismanie gemacht. Wenn z. B. in vielen Systemen jenes sogenannte Axiom Euklids „Alle rechten Winkel sind gleich" bewiesen wird, so wird dazu gesagt: „Man möchte sich wundern, daß noch kein Mathematiker bewiesen hat, daß alle Viertelstunden einander gleich sind". Die Anhänger der Induktion scheuen sich nicht, derartige Sätze rein der Anschauung zu entnehmen, erst allmählich also einen Übergang von der Propädeutik zur deduktiven Mathematik zu finden. Von älteren Schulbüchern ist in dieser Hinsicht Kretschmers Anschauungslehre charakteristisch. Dort werden Sätze, wie „Zwei Rechtecke sind kongruent, wenn sie in den anstoßenden Seiten übereinstimmen" oder „In jedem Dreieck liegen gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber" rein induktiv gefunden. (Das Buch, auf das übrigens später noch zurückzukommen ist, führt die Fusion der ebenen und räumlichen Geometrie durch; eigenartig ist, daß der Winkel in seiner allgemeinen Form erst in den letzten Kapiteln auftritt, vorher ist nur von Rechten die Rede.)

Aus neuerer Zeit nenne ich für dieses Verfahren nur zwei Beispiele, welche den ganzen Lehrgang der Unterstufe umfassen, Walthers Geometrie und das Lehrbuch von Behrendsen-Götting. In dem letzteren Buche werden die Axiome ebenso als Lehrsätze bezeichnet wie die in gleicher Weise rein anschaulich gewonnenen wirklichen Lehrsätze. Erst allmählich treten dann Beweise auf; zum ersten Mal

wird bei dem Satze vom gleichschenkligen Dreieck gezeigt, was ein Beweis ist; man scheut sich auch weiterhin nicht, im Beweise selbst mit anschaulich klaren Tatsachen zu operieren.

Besonders die Crux der früheren indirekten Beweise bei Umkehrungen wird in diesen Lehrbüchern vermieden; ganz im Gegensatz zu den Vertretern der deduktiven Richtung, wie Wittstein, Kambly u. a., die eine Fülle von Umkehrungen (z. B. gibt die Symmetrie des gleichschenkligen Dreiecks Anlaß zu fast einem halben Dutzend Sätzen) aufzählen. Bensemann geht den indirekten Beweisen, soweit sie nicht rein logisch, ohne Zuhilfenahme der Anschauung zu führen sind, auf andere Weise aus dem Wege. Er versucht, die negativen Aussagen, von denen die indirekten Beweise Gebrauch machen, durch solche positiven Inhalts zu ersetzen. So wird z. B. im Anschluß an das Tangentenviereck auch der Fall behandelt, wo die vierte Seite den Kreis schneidet oder ganz außerhalb des Kreises liegt. Dann werden Beziehungen zwischen den Seiten aufgesucht, die zu einem direkten Beweis der Umkehrung des Satzes vom Tangentenviereck führen.

In anderen Ländern (Frankreich, Italien) ist wie bei uns für den Physik-, so auch für den Mathematik-Unterricht eine Scheidung in Unter- und Oberstufe eingetreten, wobei dann ganz naturgemäß die Unterstufe mehr induktiv und anschaulich (mit allmählicher Erziehung zum deduktiven Verfahren), die Oberstufe von unten an neu aufbauend rein logisch deduktiv verfährt. Eine solche Spaltung ist der Lehrpläne wegen meines Wissens in Norddeutschland nirgends durchgeführt, wenn man von dem kurzfristigen propädeutischen Unterricht absieht; in Süddeutschland dagegen besitzen z. B. die badischen Oberrealschulen und damit auch die badischen Reformanstalten die Zweiteilung.

Mit dem bisher Gesagten ist die Rolle der Induktion im mathematischen Unterricht durchaus nicht erschöpft. Die Induktion erfährt nämlich überall da, wo überhaupt heuristisch vorgegangen wird, Anwendung bei dem Aufsuchen neuer geometrischer Wahrheiten und ferner bei der Nachprüfung von Sätzen. Neue Lehrsätze wird man die Schüler häufig an Figuren finden lassen; man wird z. B. die Winkelsumme vom Dreieck bestimmen lassen und dadurch auf den zugehörigen Lehrsatz geführt werden. Häufig wird man dabei vom Besonderen zum Allgemeinen vorschreiten; so ist z. B. die Gültigkeit des Pythagoreischen Lehrsatzes für das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck trivial; man kann an mehreren Beispielen untersuchen lassen, ob ein entsprechender Satz auch für andere rechtwinklige Dreiecke zutrifft, und dann einen entsprechenden Lehrsatz formulieren lassen. Nur einige methodische Lehrbücher wie z. B. die von Schwering und Holzmüller gehen gelegentlich soweit auf das Unterrichtsdetail ein. Seltener wird man eine induktive Nachprüfung eines Lehrsatzes vornehmen; es sei z. B. genannt die tatsächliche Abzählung des Inhalts eines auf Millimeterpapier gezeichneten Kreises und die Feststellung der Fehlergrenzen. Hier sind auch die anschaulichen

Zerlegungsmethoden im Kapitel der Flächenlehre zu erwähnen (Pythagoreischer Lehrsatz und dergl.), wobei sich dann die Begründung auf das „Siehe!" der Inder beschränken kann.

Wir haben im vorangehenden schon eine Unterrichtspraxis berührt, die man als „genetische Methode" bezeichnet hat. Zwei Punkte sind für die Aufstellung eines Systems wesentlich: einmal die Auffindung und die Anwendung der geometrischen Wahrheiten und weiter die Begründung oder die Beweise derselben. Das erste ist Sache der genetischen Methode. Der Ausdruck genetisch ist zuweilen auch in anderem Sinne gebraucht worden, er bezieht sich dann bei Definitionen auf die Entstehung der Gebilde, bei Beweisen auf die Entstehung der Figuren (siehe Abschnitt 8).

Bei Euklid ist von der Auffindung und Anordnung der Lehrsätze recht wenig zu merken; unsere heutigen Leitfäden legen erheblich mehr Gewicht auf die organische Verknüpfung der einzelnen Teile. Wie man im einzelnen zur Aufstellung von Lehrsätzen kommt, wurde oben schon angedeutet. Ehe man aber soweit ist, muß man wissen, wo man nach neuen Tatsachen suchen will. Nur zwei Beispiele dazu: wenn man den Kreis betrachtet, so wird man Aussagen suchen über sein Verhalten 1. zu Punkten, 2. zu Geraden, 3. zu Winkeln, 4. zu Dreiecken und Vielecken, 5. zu anderen Kreisen. Wenn man die Kongruenzsätze aufsucht, so wird man – ich setze den Anschluß an die entsprechenden Konstruktionen voraus – die verschiedenen Kombinationen von Seiten und Winkeln zu dreien durchgehen u. s. f. Durchaus gleichgültig für die vorliegende Frage ist die äußere Form der Darstellung, ob im Lehrbuch die einzelnen Sätze als Einheiten auftreten, oder ob das Ganze in fließende Darstellung gebracht ist. Ein typisches, nach genetischer Methode verfahrendes Lehrbuch dieser Art ist das am Joachimsthalschen Gymnasium in Berlin längere Zeit benutzte von Schindler, nur wird leider das Buch durch den „Einleitungsunfug" entstellt. Ein anderes Beispiel ist die nach der Snellschen Methode verfahrende Elementargeometrie von Roese.

Wenn wir die in diesem Abschnitt gekennzeichnete Entwicklung der Methode noch einmal andeuten, so ist es diese: in einer ersten Entwicklungsstufe begnügt man sich damit, daß der Schüler die Lehrsätze mit ihren Beweisen lernt, auf einer zweiten Stufe fordert man, daß der Schüler auch das Beweisen vorgelegter Lehrsätze lernt, auf einer dritten und höchsten Stufe der Entwicklung strebt man an, daß der Schüler selbst die Lehrsätze aufsucht und selbst sie beweist, natürlich immer an der leitenden Hand des Lehrers.

8. Die geometrische Aufgabe. Konstruktive Geometrie.

Aus jener Zeit wohl, wo die Lehrsätze des Systems mit ihren Beweisen in dogmatischer Form vorgetragen wurden, stammt die Wertschätzung der geometrischen Aufgabe. Denn die Konstruktionsaufgabe

fordert im Gegensatz zu dem System, wie es damals vorgetragen wurde, die selbständige Tätigkeit des Schülers heraus. Mit der fortschreitenden Entwicklung der Methodik ist die Wertschätzung der Aufgabe ein wenig zurückgegangen, man ist besonders in der Auswahl der Aufgaben kritischer geworden.

Es gibt eine Reihe größerer Sammlungen von Konstruktionsaufgaben, ich nenne von älteren Wöckels Geometrie der Alten, von neueren die umfassendsten ihrer Art, die von Lieber und v. Lühmann und die von Gandtner und Junghans (auch des letzteren Lehrbuch von 1879 ist sehr reich an Konstruktionsaufgaben), daneben E. F. Borth, Clasen-Bach u. v. a. Die meisten Lehrbücher und Leitfäden der Geometrie bringen heute Aufgabenmaterial, immerhin verzichten noch immer einige wenige Bücher ganz darauf (z. B. Bork-Nath, Lieber-von Lühmann, Mehler; im Anschluß an des letzteren Leitfaden hat Funcke eine Aufgabensammlung herausgegeben); auf der anderen Seite scheinen allmählich auch die erst auf Arithmetik und Algebra beschränkten, dann auch Trigonometrie und Stereometrie hinzunehmenden Aufgabensammlungen sich der Planimetrie zu erschließen. Wir finden einen Abschnitt über planimetrische Konstruktionsaufgaben bei Schulze und Pahl, in Fr. Busslers Übungsbuch; Heinrich Müller läßt sie noch in einem besonderen Heft erscheinen.

Steiner hat einmal gesagt[1]), es käme bei jeder geometrischen Aufgabe darauf an, zu untersuchen, auf welche Weise sie „theoretisch oder praktisch, am einfachsten, genauesten oder sichersten konstruiert werden könne, und zwar 1) welches im allgemeinen, 2) welches bei beschränkten Hilfsmitteln, und 3) welches bei obwaltenden Hindernissen das zweckmäßigste Verfahren sei". Die Schule streicht einen großen Teil dieser Forderungen, oder begnügt sich doch an vielen Stellen auf gelegentliche Andeutungen.

Zunächst beschränkt sie sich bei den Konstruktionsaufgaben fast durchgängig auf solche, die mit Zirkel und Lineal in einer endlichen Anzahl von Operationen ausführbar sind. Die für die Ausführung solcher Konstruktionen nötigen Postulate werden in sehr vielen Lehrbüchern im engsten Anschluß an Euklid meist gleich am Anfang aufgezählt.

Dabei sei gleich hier eingeschaltet, daß es in der Stereometrie noch kaum üblich geworden ist, das für Konstruktionen im Raume notwendige Postulat anzuführen, daß durch drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, eine Ebene gelegt werden kann; das Postulat findet sich z. B. bei Hauck-Kommerell, Müller-Witting, Thieme.

1) J. Steiner, Die geometrischen Konstruktionen, ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises als Lehrgegenstand auf höheren Unterrichtsanstalten und zur praktischen Benutzung. (1833). = Gesammelte Werke I, S. 510. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften. Nr. 60. Herausgeg. von A. J. v. Oettingen. Leipzig. (Engelmann.) 1895.

Auf Konstruktionen mit dem Zirkel allein (Mascheroni) oder mit dem Lineal und einem festen Kreis (Steiner) wird wohl nirgends in Schulbüchern Rücksicht genommen. Ebensowenig wird auch die im Linearzeichnen interessierende Frage nach der praktischsten Konstruktion auf dem Reißbrett, wobei auch das Ziehen einer Parallelen und eines Lotes durch einen Punkt als direkt ausführbar angesehen wird, einer systematischen Untersuchung unterzogen.[1]) Dagegen haben die von Witting in einer Programmabhandlung[1]) behandelten „Konstruktionen in begrenzter Ebene", die übrigens auch früheren Jahrhunderten nicht ganz fremd waren[2]), neuerdings einen Widerhall in einer Schrift von Zühlke[3]) gefunden, die dann auch das verwandte Problem angreift: die in einer Konstruktion gesuchten Schnittpunkte u. dergl. sind zwar erreichbar, erscheinen aber nicht sicher genug bestimmt.

Näherungskonstruktionen werden in den Schulbüchern nur gelegentlich (z. B. bei der Quadratur des Kreises: Henrici-Treutlein) angeführt. Immerhin gibt z. B. bei Schuster die Untersuchung der Genauigkeit bei Näherungskonstruktionen regulärer Vielecke einen interessanten Aufgabenstoff für die Trigonometrie ab.

Konstruktionen mit vom üblichen abweichenden Hilfsmitteln, also z. B. Einschieblösungen (bei der Dreiteilung des Winkels und dgl.), werden kaum je erwähnt; der Unterricht wird aber wohl zuweilen auf sie hinweisen.

Hier wäre auch ein Wort über die Geometrographie einzuschalten, gegen deren Prinzipien ja allerdings in Deutschland auch Bedenken geäußert sind (Mehmke). Reusch sagt in einem Heft „Planimetrische Konstruktionen in geometrographischer Ausführung": „Eine Erörterung der Frage, in welcher Weise die Geometrographie im Unterricht zu verwerten sei, wird wohl am besten noch hinausgeschoben, bis sich seitens der Herren Fachkollegen an höheren Schulen eine größere Beteiligung an den geometrographischen Untersuchungen zeigt, die auch bezüglich der fundamentalen planimetrischen Aufgaben noch keineswegs als abgeschlossen zu betrachten sind." Immerhin liegt es nicht weit von dem Gedanken Lemoines ab, wenn z. B. in dem methodischen Lehrbuch von Schumann die Zahl der notwendigen Konstruktionslinien als Maßstab für die Einfachheit einer Konstruktion genommen wird.

Bei der Lösung geometrischer Aufgaben in der Schule liegt die Gefahr nahe, daß sie in eine geistlose und auch für den mit den verschiedenen Kniffen Vertrauten recht fruchtlose Technik ausartet. Wer hingegen diese Kniffe nicht kennt, der steht meist vor Rätseln, er kann

1) A. Witting, Geometrische Konstruktionen, insbesondere in begrenzter Ebene. Prg. Gymnasium zum heiligen Kreuz. Dresden 1899.

2) W. Lietzmann, Eine geometrische Aufgabensammlung aus dem Ende des 17. Jahrhunderts. Mathematisch-Naturwissenschaftliche Blätter 6 (1909), 57.

3) P. Zühlke, Ausführung elementar-geometrischer Konstruktionen bei ungünstigen Lageverhältnissen. Leipzig. (Teubner.) 1905

ohne fremde Hilfe die Konstruktionen „von Dreiecken mit möglichst unzweckmäßigen Stücken“ (Lindemann) nicht finden. In der Absicht, dem entgegenzuwirken, begegnen sich zwei Bestrebungen. Die eine geht dahin, Aufgaben mit Kniffen und mit komplizierten Daten (z. B. bei Dreieckskonstruktionen: Summe zweier Höhen oder Summe zweier Radien von Ankreisen) auszumerzen. Die andere geht darauf aus, eine Methodik der Konstruktionsaufgaben zu entwickeln. Die Bemühungen in dieser Richtung sind sehr zahlreich. Bahnbrechend waren die zuerst dänisch erschienenen Bücher von Petersen, doch ist Petersens Methodik und Theorie kaum direkt für Schüler verwertbar, da diese gründlichen Untersuchungen mehrfach über den Rahmen der Schule hinausgehen. Neuere für den Lehrer bestimmte Bücher mit ähnlichen, aber weitergehenden Zielen sind F. Enriques, Fragen der Elementargeometrie[1]) und A. Adler, Theorie der geometrischen Konstruktionen.[2]) Für die Schüler sind nicht so sehr allgemeine und möglichst allumfassende Methoden als speziellere und damit für die Schüler leichter verständliche am Platze. In dieser Weise verfahren eine Anzahl Methodiken der Konstruktionsaufgabe, wie die von Alexandroff, Brockmann, G. Hoffmann, E. R. Müller und auch Lehrbücher der Geometrie, wie z. B. die von Bork-Nath, Mahler, Mehler-Schulte-Tigges, Spieker. Es werden da angeführt: Die Methode der geometrischen Örter, der Reduktion (auf Hilfsdreiecke), die Ähnlichkeitsmethode, dann die Methode der Parallelverschiebung, des Umklappens (Drehung um eine Achse), der Drehung (Drehung um einen Punkt), schließlich die Konstruktion algebraischer Ausdrücke.

Eine wichtige Rolle spielt bei der Konstruktionsaufgabe die Determination, und zwar in erster Linie deshalb, weil in ihr die Überlegungen über die Lösbarkeit und Mehrdeutigkeit der Aufgabe anknüpfen an die Variabilität der gegebenen Größen. Ich greife als Beispiel zwei Aufgaben aus den Hauptsätzen von Bork-Nath heraus.

Bei der Konstruktion eines Dreiecks aus einer Seite a, der zugehörigen Höhe h_a und der zugehörigen Mittellinie m_a kann man, wie leicht einzusehen, über a und h_a beliebig verfügen. Wenn jetzt aber m_a alle Werte von 0 bis ∞ durchläuft, so existiert nicht immer ein Dreieck, vielmehr erhält man keines, eines oder zwei, je nachdem $m_a < h_a$, $m_a = h_a$ oder $m_a > h_a$ ist.

Handelt es sich etwa um die Konstruktion eines Dreiecks aus einer Seite a, der Höhe h_b von dem einen und der Mittellinie m_c von dem anderen Endpunkte dieser Seite, so wird man nicht mehr über a und h_b frei verfügen können; man wird vielmehr h_b und m_c variieren lassen und dann das folgende Schema erhalten:

---

1) F. Enriques, Fragen der Elementargeometrie. Deutsche Ausgabe von H. Fleischer. Teil II: Die geometrischen Aufgaben, ihre Lösung und Lösbarkeit. Leipzig. (Teubner.) 1907.

2) A. Adler, Theorie der geometrischen Konstruktionen. Leipzig. (Göschen.) 1906.

h_b	m_c	Lösung:
$> a$	belieb.	kein Dreieck.
$= a$	$< \frac{a}{2}$	kein Dreieck.
	$= \frac{a}{2}$	eine Gerade.
	$> \frac{a}{2}$	zwei kongruente Dreiecke.
$< a$	$< \frac{h_b}{2}$	kein Dreieck.
	$= \frac{h_b}{2}$	ein Dreieck.
	$> \frac{h_b}{2}$	zwei Dreiecke.

Diese Beispiele zeigen, wie die Determination vortrefflich geeignet ist, den Schüler mit dem Begriff der Variablen und der Funktion vertraut zu machen.

Das ist nun besonders dort der Fall, wo der Schüler die Abhängigkeit einer geometrischen Größe von anderen in eine algebraische Form fassen kann, bei den sog. Konstruktionen algebraischer Ausdrücke. So schließt sich (vergl. Behrendsen-Götting) z. B. an die Konstruktion der Strecke

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

(vergl. Abschnitt 6) die Frage an, wie c sich verändert, wenn a oder b sich ändert. Das führt dann auf die Diskussion der Funktionen

$$y = \sqrt{a^2 - x^2},$$
$$y = \sqrt{x^2 - b^2},$$

also auf den Kreis und die gleichseitige Hyperbel.

Wir sprachen bis jetzt von der Rolle, die die geometrische Konstruktion gewissermaßen für sich allein betrachtet im Unterricht spielt. Sie wird nun aber von vielen auch für den eigentlichen Lehrgang herangezogen. Wenn heute immer mehr das Bestreben hervortritt, die Zahl der Lehrsätze des eigentlichen Systems zu verringern, so geschieht das nicht zum wenigsten deswegen, weil man dem Schüler viele früher als besondere Lehrsätze ausgesprochene Tatsachen in der Gestalt der geometrischen Aufgaben darbieten kann.

Aber nicht nur als Ersatz für weniger wichtige Lehrsätze, sondern überhaupt „als Vorbereitung für künftig zu behandelnde geometrische Wahrheiten“ soll die Aufgabe dienen. An die Konstruktion, an einen Kreis von einem Punkte aus die Tangenten zu ziehen, wird sich z. B.

der Lehrsatz knüpfen, daß diese beiden Tangenten gleich sind, daß die Zentrale Winkelhalbierende des Winkels zwischen den Tangenten ist usf.

Nur ein Schritt weiter ist es, wenn man direkt aus der Konstruktion Lehrsätze erschließt. Immer weitere Verbreitung gewinnt der Gebrauch, die Kongruenzsätze aus der Eindeutigkeit der fundamentalen Dreieckskonstruktionen zu erschließen. Man läßt die Schüler aus gegebenen Stücken etwa das Dreieck konstruieren; das wird dann von den einzelnen Schülern ausgeschnitten, und die 30 oder 40 Stück werden aufeinander geschichtet. Die Lehrbücher, die vordem (z. B. Kambly) häufig erst den Kongruenzsatz, dann die entsprechende Konstruktion brachten, verfahren heut zum größten Teil umgekehrt, ja deuten den Euklidischen Deckungsbeweis nur eben ganz summarisch an (Behrendsen-Götting) oder lassen ihn ganz fallen (Walther). Allgemein durchgeführt ist die konstruktive Methode bei A. Gille; bei ihm ist an Stelle der Folge: Lehrsatz, Voraussetzung, Behauptung, Beweis, getreten: Aufgabe, Untersuchung, Lehrsatz, Folgerung (analog dem Verfahren bei Konstruktionsaufgaben: Aufgabe, Analysis, Konstruktion, Determination). Weniger weit geht Lesser in seinem Hilfsbuch, der die Reihenfolge: Aufgabe, Lehrsatz, Beweis hat. Schließlich nenne ich noch Bensemann, bei dem gleichfalls systematisch die Konstruktion an die Spitze gestellt wird.

Was sich bei den Kongruenzsätzen allmählich allgemein einzubürgern scheint, will Hubert Müller in seinen Elementen der Planimetrie verallgemeinern: „Man kann die Beweise des Systems weder nach der Schwierigkeit noch nach der Beweisart ordnen"; es gibt Beweise, die der Schüler selbständig nicht oder doch nur schwer finden würde, damit aber liegt die Gefahr des Einpaukens nahe. Deswegen beschränkt Hubert Müller das System auf eine Anzahl Sätze, deren Beweis nicht zu schwer ist, und behandelt den Inhalt der anderen Sätze konstruktiv. Nach der Ansicht des Verfassers sind z. B. die Kongruenzbeweise beim Parallelogramm zu schwierig für diese Klassenstufe. Er läßt also drei Punkte eines Vierecks fest annehmen, den 4. finden, so daß 1. je zwei gegenüberliegende Seiten gleichlaufend sind; 2. eine Seite der gegenüberliegenden gleich und parallel ist; 3. je zwei gegenüberliegende Seiten gleich sind; 4. je zwei gegenüberliegende Winkel gleich sind; 5. die Diagonalen einander halbieren. Die Zeichnungen ergeben deckungsgleiche Figuren; daraus folgen, wenn nach 1 das Parallelogramm definiert wird, „konstruktiv" die durch die Eigenschaften 2 bis 5 gegebenen Lehrsätze.

Ganz ähnlich ist die von M. Schuster angewandte Methode. Ich will auch von ihm ein Beispiel wählen, das dadurch, daß es mit dem Element der Bewegung von Figuren operiert, zum nächsten Kapitel überleiten soll. Es handelt sich um denselben Satz wie oben. Es wird die Aufgabe gestellt: „Im Parallelogramm $ABCD$ ist die Diagonale AC durch O halbiert. Drehe $\triangle ABC$ um O um einen Winkel von 180^0: wohin fallen dann OA, OC, $\sphericalangle OAB$, $\sphericalangle OCB$, Punkt B, Seite AB, Seite BC?

Wohin fällt *OB*?" Daraus folgt dann der Satz: „Im Parallelogramm sind a) je zwei Gegenseiten einander gleich, b) je zwei Gegenwinkel einander gleich, c) halbieren die Diagonalen einander."

9. Beweglichkeit der Figuren. Geometrie der Lage.

Die Planimetrie Euklids vermeidet es, die Beweglichkeit der Figuren als Beweismittel zu verwenden. Bekanntlich weicht Euklid nur beim Beweis des ersten Kongruenzsatzes und seiner Umkehrung hiervon ab, man hat deshalb auch diesen Abschnitt der Elemente als spätere Redaktion erklärt, und andere, z. B. Th. Simpson (1710–1761), haben den „Fehler" Euklids verbessert und den ersten Kongruenzsatz als Axiom ausgesprochen. Heute wird die Zahl der Lehrbücher, in denen von der Beweglichkeit nirgends Gebrauch gemacht wird, äußerst gering sein. Helmes ist noch Verteidiger der „alten Geometrie, fest und unbeweglich in plastischer Ruhe"; der neuen Geometrie „in Fluß und Bewegung" verwehrt er den Eingang in die Schule. Heute in der Zeit des Funktionsbegriffes berühren Helmes' Worte sehr eigentümlich: „Und glaubt man selbst an eine Zukunft, wo schon in den Kinderschulen der Unterricht nur gleich mit der veränderlichen Größe werde beginnen können: so hat man doch zu bedenken, daß diese sogenannte „Entwicklungshypothese" nach Aeonen und nicht nach Jahrhunderten oder Jahrtausenden zählt!" Tatsächlich dringt an allen Ecken und Kanten des nach der alten Geometrie aufgebauten Systems die neuere ein und gewinnt stetig an Boden.

Da sind zunächst die Begriffsbestimmungen zu nennen. Linien werden als Orte bewegter Punkte erklärt (z. B. der Kreis), der Winkel entsteht durch Drehung eines Strahles um seinen Endpunkt; auch die Unterscheidung Gerade-Strahl-Strecke und damit Dreiseit-Dreieck, Vierseit-Viereck ist nicht euklidisch.

Damit steht im Zusammenhang die Einführung positiver und negativer Strecken, wie sie zwar in der Trigonometrie allgemein gebräuchlich ist, während wir ihr in der Planimetrie nur selten begegnen. Baltzer benützt sie u. a. in der Polarentheorie und bezieht sich dabei auf den baryzentrischen Kalkul von A. F. Möbius[1]), ein Buch, das mittelbar einen großen Einfluß auf den Unterricht gehabt hat.

Die axiale Symmetrie[2]) findet in immer mehr Lehrbüchern Eingang; man begegnet ihr jedenfalls fast stets beim gleichschenkligen Dreieck und bei den sogenannten Fundamental-Konstruktionen (Winkelhalbierung, Streckenhalbierung, Errichten und Fällen der Senkrechten werden am Rhombus abgelesen!). Hinzu kommt allmählich die Unterscheidung direkt

1) A. F. Möbius, Der baryzentrische Kalkul. Leipzig (Barth) 1827 = Gesammelte Werke 1. Bd. S. 1. Leipzig. (Hirzel.) 1885.

2) Vgl. E. Brocke, Über die Benutzung symmetrischer Beziehungen im geometrischen Unterricht. Jahresber. der Realschule Münster. Elsaß. 1907.

oder erst nach Umklappen kongruenter Dreiecke und damit z. B. die Ableitung des Satzes vom gleichschenkligen Dreieck durch Beweis von $ABC \simeq ACB$ (Kambly-Röder). Die Benutzung zentraler Symmetrie ist nicht ganz so häufig. Vorbildlich sind in dieser Hinsicht Mahler, Schumann und Schulte-Tigges in der Neubearbeitung des Mehlerschen Leitfadens, der neben der üblichen Dreieckslehre eine zweite, die Symmetrie bevorzugende Theorie gibt, und dann wieder Behrendsen-Götting und Walther. Einem Einschlag neuer Lehren in das alte System begegnet man auch in der Ähnlichkeitslehre. Während in der Mehrzahl der Lehrbücher von ähnlichen Vielecken, definiert als solche mit gleichen entsprechenden Winkeln und proportionalen entsprechenden Seiten, ausgegangen wird, bringen andere wenige (als einer der ersten Boymann, dann z. B. Walther, selbstverständlich auch das weiter unten noch näher zu besprechende Buch von Henrici-Treutlein) die Definition: „Geradlinige Figuren sind ähnlich, wenn sie sich in eine solche Lage bringen lassen, daß die von irgendeinem Punkte nach den Ecken der einen Figur gezogenen Geraden oder Strahlen durch die Ecken der anderen Figur gehen und von denselben proportional geschnitten werden“ (oder an Stelle des letzten, „daß die entsprechenden Seiten parallel sind“). Daß die perspektivische Lage in der Ähnlichkeitslehre zur Sprache kommt, bürgert sich immer mehr ein.

Die Veränderlichkeit der einzelnen Stücke in einer Figur, insbesondere, wie wir schon früher sahen, bei den Konstruktionsaufgaben, läßt die gegenseitige Abhängigkeit erkennen und ist deshalb außerordentlich geeignet, die Bildung des Funktionsbegriffes zu unterstützen. Die neueste Auflage von Koppe-Diekmann bemerkt z. B. schon beim Satz vom Nebenwinkel, daß der eine Winkel eine Funktion des andern ist.

Es mehrt sich heutigentags immer mehr die Zahl derer, welche mit dieser Mischung alter und neuer Geometrie nicht zufrieden sind, die mit V. Schlegel der Meinung sind, „daß nur von einem vollständigen Bruch mit den alten Anschauungen und Methoden eine wissenschaftlich befriedigende Neugestaltung der Geometrie erwartet werden kann.“ Pioniere in das Neuland waren Schlegel selbst in seinem „Lehrbuch“, Kruse und Milinowski, alle aber ohne nachhaltigen Erfolg. Fink, dessen Lehrbuch sich an Lehrer wendet, wünscht: „eine lebendige Durchdringung der euklidischen mit der projektiven Geometrie“; „dazu scheint es geboten, der Unterstufe die euklidische Geometrie im großen und ganzen in ihrer seitherigen Form zu belassen, jedoch in diesem Rahmen Fundamentalbegriffe der projektiven Geometrie überall da organisch einzufügen, wo sich dieselben ungezwungen und nutzbringend verwerten lassen“.

Dieselbe Absicht verfolgt das Schulbuch von Hubert Müller. Auch Müller behielt den Lehrstoff und seine Anordnung nach Möglichkeit bei, die Methode war aber die der neueren Geometrie. „Das Prinzip der Starrheit ist beseitigt“, von Anfang an werden axiale und zentrale

Symmetrie eingeführt und überall beim Beweisen benutzt. Die Größenbeziehungen sind nicht das allein Ausschlaggebende, auch die Lagebeziehungen werden bearbeitet. Das Dualitätsprinzip kommt zu seinem Recht. Es ist schwer zu sagen, warum der Einfluß des Müllerschen Leitfadens schließlich abflaute; schließlich ist es wohl das, daß er nicht radikal auch den Lehrstoff änderte. So wurden wertvolle Gedanken aus dem Leitfaden allmählich in andere Lehrbücher übernommen, und diese waren dann mit ihrer Mischung von alter und neuer Geometrie bequemer für den Lehrer.

Anders das Lehrbuch von Henrici und Treutlein. Thieme hat einmal den Unterschied der beiden Bücher so charakterisiert: „Während bei Hubert Müller der Stoff in dem Vordergrunde steht, dieser mit neueren Anschauungen durchtränkt und nach neueren Methoden behandelt wird, treten bei Henrici und Treutlein die Methoden selbst in die erste Linie. Die Methoden der Beweisführung sind bei ihnen maßgebend für die Gliederung des Stoffes. Diese Methoden selbst stammen aus der neueren Geometrie, sind im Grunde besondere Fälle der allgemeinen Methoden der Projektivität". Damit fehlen allerdings, wie Klein jüngst noch bedauernd ausgesprochen hat, die über die linearen Transformationen der projektiven Geometrie hinausgehenden allgemeinen Verwandtschaften.

Es kann hier nicht eine Darstellung des gesamten Lehrgangs gegeben werden, nur einige wenige charakteristische Züge seien herausgehoben. Die Verfasser beginnen mit der Methode der Umdrehung (zentrale Symmetrie) und der Umwendung (axiale Symmetrie). Erst dann wird die „Verschiebung längs einer Geraden" und die Drehung um einen Punkt betrachtet und der Übergang zur „Deckungsgleichheit" gefunden. Interessant ist hierbei die an das Schulbuch von Veronese[1]) erinnernde Einführung der Parallelen: Es werden „in bezug auf einen Punkt entgegengesetzte oder diametrale" Figuren definiert als solche, deren Punkte paarweise auf Halbstrahl und Gegenstrahl dieses Punktes in gleichen Abständen von ihm liegen. Zwei entgegengesetzte Geraden sind dann parallel.

Die allgemeine Disposition des Lehrbuches ist kurz: (im 1. Bd.) Dreieck, Kreis, Vier- und Vieleck, Flächengleichheit; (im 2. Bd.) Ähnlichkeitslehre (betrachtet nach den einfachsten Gesetzen der Perspektivität), dann Untersuchung der Eigenschaften perspektiver und projektiver Punktreihen und Strahlenbüschel bis hin zu den Kegelschnitten, betrachtet als Bilder des Kreises. Die Disposition der einzelnen Kapitel ist durchaus durch die angewandten Methoden bedingt. So haben wir z. B. beim Viereck: 1. das Viereck mit einem Mittelpunkt, 2. Viereck und Vierseit mit einer Mittellinie, 3. Viereck und Vierseit mit Mittelpunkt

1) G. Veronese und P. Gazzaniga, Elementi di Geometria. Parte I. Ediz IV. 1909. Parte II. Ediz III. 1905. Verona-Padova, Fratelli Drucker.

und Mittellinie, 4. Viereck im Kreis und Vierseit um den Kreis. – Hier kommt auch das Dualitätsprinzip zur Geltung; schon beim Dreieck werden gleichschenkliges und gleichgeneigtes Dreieck parallelgehend behandelt.

Das Lehrbuch von Henrici-Treutlein fordert den Vergleich mit den analogen Erscheinungen des Auslandes heraus, besonders mit Mérays Nouveaux Éléments[1]). Da ist nun der charakteristische Unterschied, daß Méray immer vom Allgemeinen zum Speziellen vorzuschreiten sucht, während Henrici-Treutlein den der Schule mehr entsprechenden umgekehrten Weg einschlagen. Méray beginnt mit der Translation und untersucht nun, was alles er damit erreichen kann, Henrici und Treutlein beginnen mit ganz speziellen Fällen der Rotation. Damit hängen andere Unterschiede zusammen. Méray legt Wert auf ein vollständiges Axiomensystem, Henrici-Treutlein nicht; Méray führt die Fusion der räumlichen und ebenen Geometrie vollständig durch, Henrici-Treutlein befolgen sie nicht, wenn sie sie auch für die späteren Kapitel über perspektivische Abbildung in einer Ebene und von einer Ebene auf eine andere Ebene empfehlen. Alles in allem: Henrici-Treutlein ist ein aus dem Unterricht erwachsenes Schulbuch, Méray ein wissenschaftliches, nur künstlich dem Unterricht angepaßtes Werk. In Frankreich sind Mérays Elemente bahnbrechend gewesen und haben dem Unterricht besser entsprechende Lehrgänge zur Folge gehabt, so daß die Frage, ob statische oder kinematische Geometrie, heute in Frankreich im Vordergrund steht. In Deutschland ist das Lehrbuch von Henrici-Treutlein noch eine vereinzelte Erscheinung.

10. Erweiterung des Planimetriepensums auf der Oberstufe. Apollonische Kegelschnittlehre.

An die Planimetrie der Unterstufe schließt sich auf der Oberstufe eine Erweiterung an, die einige über Euklid hinausgehende Gedankengänge zum Gegenstande hat, und die häufig als neuere Geometrie bezeichnet wird. (Andere verstehen unter neuerer Geometrie die Geometrie der Lage.) Um von der üblichen Stoffwahl einen Begriff zu geben, stelle ich, etwa nach Spieker oder Koppe-Diekmann, den Grundstock der hierher gehörigen Sätze zusammen. An der Spitze steht in der Regel ein Abschnitt über Transversalen im Dreieck; hier werden die Sätze des Ceva und des Menelaus, des Pascal und des Brianchon (doch in diesem Zusammenhange nur für den Kreis) und der vom Neunpunktekreis (Feuerbachschen Kreis) bewiesen. Zuweilen werden dann noch die Eulersche Gerade (bestimmt durch den Schnittpunkt der Mittellinien, den Schnittpunkt der Höhen, den Mittelpunkt des Umkreises in einem Dreieck) und ähnliche Untersuchungen hinzugenommen.

In einem zweiten Abschnitte wird die harmonische Teilung (Punktreihe und Strahlenbüschel) behandelt, schließend etwa mit dem Satz

1) Vergl. das Zitat in Abschnitt 5.

des Apollonius (der Ort der Punkte, deren Abstände von zwei festen Punkten konstantes Verhältnis haben, ist ein Kreis usf.) und der Untersuchung von vollständigem Viereck und Vierseit. Den Abschluß macht ein Kapitel über Ähnlichkeitspunkte an Kreisen (mit dem Satz von Monge über die Lage der Ähnlichkeitspunkte bei drei Kreisen), über Pol und Polare am Kreis, über Chordalen und Potenzlinien (mit dem dem Mongeschen dual entsprechenden Satz über den Chordal- bzw. Potenzpunkt dreier Kreise) und dann das Berührungsproblem des Apollonius. Diese Aufgabe (zu drei Kreisen die berührenden Kreise zu finden) mit ihren insgesamt zehn Spezialfällen (durch Ausartung der Kreise in Gerade oder Punkte) bildet gleichsam den Höhepunkt dieser „Erweiterung der Planimetrie". Neuerdings wird dem Apollonischen Berührungsproblem zuweilen auch die Malfattische Aufgabe an die Seite gestellt (in ein Dreieck drei Kreise zu zeichnen, so daß jeder die beiden anderen und zwei Seiten des Dreiecks berührt); von älteren Lehrbüchern, die das bereits tun, ist etwa Junghans zu erwähnen, von neueren nenne ich Holzmüller im dritten Teile seiner Elementarmathematik.

Eine andere Anordnung wie die eben genannte läßt sich dadurch kennzeichnen, daß die harmonische Teilung vorweggenommen und mit Benutzung dieser Begriffe die Sätze von Ceva, Menelaus usf. bewiesen werden. So findet man es beispielsweise bei Schulte-Tigges (Kegelschnitte) oder bei Schuster, der übrigens die Chordalen ganz an die Spitze stellt. Bei einer dritten Art der Anordnung (bei Müller-Witting) werden Chordalen, Ähnlichkeitspunkte, Ceva- und Menelaussatz mitsamt der Apollonischen Berührungsaufgabe vorweggenommen, dann erst werden die harmonischen Punkte und Strahlen (mit Viereck und Vierseit, Pol und Polare) im Zusammenhang dargestellt.

Die Behandlungsweise aller dieser Fragen ist zunächst die alte „starre" euklidische. Nicht der bewegliche Punkt einer Punktreihe, der bewegliche Strahl eines Strahlenbüschels, sondern die starre Figur wird betrachtet. Nur ganz selten kommt ein moderner Gedanke hinein, wird etwa einmal das Doppelverhältnis oder dergleichen berührt. Es kann etwa auf das Buch von Fuhrmann als ein Beispiel dieser Art verwiesen werden.

Der Wunsch nach einer synthetischen Geometrie der Kegelschnitte in Prima wurde etwa in den siebziger Jahren des vorigen Jahrhunderts laut. Als Gründe wurden angeführt (1878 von Buchbinder) 1. die Anwendbarkeit in der Physik, 2. die Gelegenheit, das geometrische Anschauungsvermögen weiter zu stärken und die Möglichkeit einer immanenten Wiederholung der Planimetrie, 3. die synthetische Geometrie würde ein Gegengewicht gegen die gerade in Prima überwiegende Arithmetik sein.

Für die synthetische Kegelschnittlehre, wie sie sich dann herausgebildet hat, war „die berühmte Steinersche Vorlesung" (Gallen-

kamp) über synthetische Geometrie[1]), und zwar deren erster, die Kegelschnittlehre elementar, ohne Benutzung projektiver Methoden behandelnder Teil, von ausschlaggebender Bedeutung. Die Kegelschnittlehre, die so allmählich Eingang in die Schulen gefunden hat, operiert wesentlich im Anschluß an oder doch nach den Methoden von Apollonius. Typische Beispiele des üblichen Lehrganges findet man etwa in den Lehrbüchern von Koppe-Diekmann, Müller-Hupe, Thieme; von besonderen Schriften nenne ich das bahnbrechende, zuerst 1877 in der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht erschienene Werkchen von Erler und das häufig benutzte von Handel.

Es werden in der Regel nacheinander Parabel, Ellipse und Hyperbel behandelt, daran schließt sich meist noch ein Kapitel über gemeinsame Eigenschaften der Kegelschnitte; abweichend von dieser Reihenfolge wird von einzelnen die Parabel zwischen Ellipse und Hyperbel gestellt (Bork-Nath, Schulte-Tigges). Als Ausgangsdefinition wird meist die auf den Brennpunktseigenschaften beruhende der als geometrischer Ort aufgefaßten Kurve genommen. Hier werden zwei Fassungen gegeben, neben der bekannten auch die Form: die Ellipse ist geometrischer Ort der Mittelpunkte aller Kreise, die einen gegebenen Kreis berühren und durch einen Punkt innerhalb (bei der Hyperbel außerhalb) gehen. Als Beispiel einer abweichenden Definition sei die Fassung bei Müller-Hupe erwähnt: Man zeichne Punkte, deren Entfernungen von einem festen Punkte F und einer festen Geraden g ein unveränderliches Verhältnis ε besitzen, das kleiner als (für die Hyperbel größer als, für die Parabel gleich) 1 ist.

Die Diskussion der Gestalt des Kegelschnittes leitet über zu der Untersuchung der gegenseitigen Beziehungen von Punkt und Kegelschnitt, von Gerade und Kegelschnitt. Von einer Tangente (bei der Hyperbel auch Asymptote) wird zu Sätzen über zwei (Leitlinien) und drei Tangenten übergegangen, von wo aus dann die Frage konjugierter Durchmesser ihre Erledigung findet. Den Beschluß macht die Quadratur des Kegelschnittes, die durch geeignete in den einzelnen Grenzübergängen vollständig durchgeführte Integrationsmethoden erreicht wird, meist ohne daß der Begriff Integral genannt wird.

Dem Abschnitt über allgemeine Eigenschaften der Kegelschnitte ist die Herstellung der Verbindung zwischen räumlicher Entstehung des Kegelschnittes und Definition als ebener geometrischer Ort vorbehalten, dabei kommen die Grenzformen Punkt, eine, zwei Gerade zur Sprache. Hier geht man dann meist auch auf einige harmonische Beziehungen ein, gibt etwa die Begriffe Pol und Polare und die — vorher nur für den Kreis abgeleiteten — Sätze von Pascal und Brianchon.

Was die Behandlung der einzelnen Sätze anlangt, so wird in der Regel die Parabel recht eingehend besprochen; bei der Ellipse und Hy-

1) J. Steiner, Vorlesungen über synthetische Geometrie. 1. Teil: Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung. Bearb. von C. F. Geiser. 3. A. Leipzig. (Teubner.) 1887.

perbel treten dann dieselben Lehrsatzgruppen und Beweismethoden wieder auf, und das ermöglicht eine schnellere Erledigung dieser Teile. Damit wird auch dem Bedenken gesteuert, daß „die mannigfaltigen Beweise an das Gedächtnis der Schüler große Ansprüche stellen". Lange-Zühlke gehen noch weiter. Sie wählen nicht diese Anordnung (Parabel, Ellipse, Hyperbel), sondern entwickeln die einander entsprechenden Sätze an den drei Kegelschnitten jeweilig im Zusammenhange, also etwa erst die Definitionen, dann Tangenten und Sekanten, Leitlinien usf. Eine solche natürliche Disposition hat bereits Gallenkamp im ersten Teile seiner synthetischen Geometrie. Er gliedert den Stoff in zwei Kapitel: Die Kegelschnitte in der Ebene und die Kegelschnitte am Kegel und behandelt in diesen Abschnitten die einzelnen Kegelschnitte neben-, nicht nacheinander.

Es ist gelegentlich versucht worden, spezielle Kegelschnitte ebenso wie den Kreis durchaus elementar und für die Unterstufe verständlich zu behandeln, das hat Milinowski mit der gleichseitigen Hyperbel, M. Simon mit der Parabel getan; doch sind ihre Bestrebungen wohl nicht in weitere Kreise der Unterrichtenden gedrungen.[1])

Das System der Kegelschnittlehre wird wie die Planimetrie der Unterstufe durch eine große Zahl von Konstruktionsaufgaben belebt; Material geben in dieser Hinsicht alle Lehrbücher.

Analytische Betrachtungen werden in vielen Fällen nach Möglichkeit gemieden, Erler benutzte sie noch recht reichlich (rechtwinklige und schiefwinklige Koordinaten), auch Handel gibt wenigstens einige Gleichungen an (z. B. Scheitelgleichung der Parabel, Mittelpunktsgleichung der Ellipse, bezogen auf konjugierte Durchmesser, Asymptotengleichung der Hyperbel).

In der Unterrichtspraxis wird man meist die synthetische Geometrie der analytischen vorangehen lassen (die umgekehrte Folge findet sich bei Bork-Nath). Neuerdings mehren sich aber die Beispiele für Verschmelzung der synthetischen und der analytischen Kegelschnittlehre. Für diese im Sinne der Konzentration des mathematischen Unterrichts sehr bedeutsame Tatsache führe ich als Beleg die Kegelschnittlehre von Pietzker und die Darstellungen der Kegelschnitte in den Lehrbüchern von Henrici-Treutlein und von Müller-Witting (Lehrbuch) an.

11. Geometrie der Lage auf der Oberstufe.

Schon in der Planimetrie der Unterstufe hatten wir Gelegenheit, das Eindringen von Begriffen, die der Geometrie der Lage entlehnt sind, an vielen Stellen zu konstatieren, und wir konnten auch Beispiele für gänz-

1) Ph. Weinmeister hat neuerdings (Unendlichkeitsrechnung in der Schule. Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. 38 (1907), 1) auf eine elementare Behandlung der Parabel und der gleichseitigen Hyperbel hingewiesen: „Nach meiner Ansicht treiben wir in der Schule im allzu engen Anschluß an Euklid viel zu viel Kreislehre." Er denkt sich die erste Durchnahme dieser Kegelschnitte bereits in Tertia und beruft sich dabei auf die österreichischen Lehrpläne.

lich im Sinne der projektiven Geometrie umgestaltete Lehrgänge finden. Die Beziehungen von Figuren, die den Lehrstoff der Unterstufe abgeben, sind aber anderer Art als diejenigen Begriffe und Untersuchungen, mit denen man sich beim Aufbau der projektiven Geometrie zu beschäftigen pflegt. Die Einsicht, daß man das Planimetriepensum der Unterstufe nicht gut mit Punktreihen, Strahlenbüscheln und den projektiven Beziehungen zwischen ihnen beginnen kann, sondern besser beim alten Stoff, bei Dreieck, Viereck und Kreis bleibt, wenn man auch all die zu untersuchenden Eigenschaften wie z. B. Kongruenz, Ähnlichkeit dem Begriffe der projektiven Verwandtschaft unterordnen kann, diese Einsicht läßt es begreiflich erscheinen, daß ein Beginn mit den allgemeinen Elementen der projektiven Geometrie erst auf der Oberstufe möglich erscheint.

Die Zahl der Autoren, die es unternehmen, auch der Schule einige Grundtatsachen über projektive Beziehungen zu erschließen, ist groß, die Art der Ausführung sehr verschieden. Zunächst sei die Auffassung der Kegelschnitte als Bilder eines Kreises erwähnt und die Diskussion dieser Beziehungen, natürlich mit den Methoden der „starren" Geometrie (so bei Schulte-Tigges und in Pietzkers Kegelschnittlehre). Dabei spielen die sogenannten Dandelinschen Kugeln eine Rolle. Dieses Kapitel stellt den für eine vollständige Darstellung nötigen Zusammenhang zwischen der Definition des Kegelschnittes einmal als geometrischen Ort, zum andern als ebenen Schnitt durch den Kegel her.

Die des weiteren zu besprechenden Methoden haben das gemeinsam, daß sie sich die Aufgabe stellen, den Schüler mit den Grundeigenschaften projektiver Gebilde bekannt zu machen. Ich möchte zunächst den Standpunkt kennzeichnen, den Schafheitlin in seinem jüngst erschienenen Buche einnimmt. Er sagt: „So reizvoll für den Mathematiker die Methoden der Geometrie der Lage sind, so stoßen sie bei der Mehrzahl der Schüler nur auf geringes Verständnis. Zum Teil liegt es daran, daß das Messen und Vergleichen ihnen so unzertrennlich seit der ersten Geometriestunde mit diesem Wissenszweige verknüpft zu sein scheint, daß ihnen die Nichtberücksichtigung der Maßeigenschaften gesucht und unnatürlich vorkommt; ferner aber bringen die Schüler stets den Kegelschnittaufgaben das größte Interesse entgegen, die sich auf alles das beziehen, was mit dem Mittelpunkte, den Achsen und den Brennpunkten zusammenhängt, so daß sie in dem Gefühl bestärkt werden, daß die vorherige Vernachlässigung der Maßbeziehungen etwas Gekünsteltes sei." Daraus schließt der Verfasser, daß man die Begriffe der projektiven Geometrie nicht meiden, sie aber mit den Methoden der „starren" Geometrie behandeln soll. Ich lasse ihn seinen Lehrgang selbst skizzieren: „Um Einfachheit und Einheitlichkeit zu erlangen, stelle ich den Doppelsatz des Pascal und Brianchon an die Spitze der Kegelschnittlehre. Zu seiner Begründung benutze ich die projektiven Eigenschaften der Strahlenbüschel, die ich aber unter fortwährender Benutzung von Maßbeziehungen behandle. Auch bei den zum Schluß besprochenen Involutionen und den

polaren Eigenschaften ziehe ich beständig Maßbeziehungen zur Begründung und Erklärung heran."

Andere Autoren gehen insofern über Schafheitlin hinaus, als sie in der Behandlung der Grundgebilde sich mehr der Methoden der Geometrie der Lage auch bei der Begründung und Ableitung dieser Eigenschaften bedienen, sie bleiben aber insofern hinter ihm zurück, als sie sich auf einzelne Kapitel beschränken. So bedient sich Pietzker dieser Beziehungen bei der vorher skizzierten Erweiterung der Planimetrie, während er bei der Kegelschnittlehre darauf verzichtet. Lange behandelt die Kegelschnittlehre zunächst in Maßgeometrie, fügt dann aber, „um die allgemeine Konstruktion eines Kegelschnittes aus fünf Elementen zu ermöglichen", eine Darstellung der projektiven und involutorischen Beziehungen bis zum Satze von Desargues hinzu. Schulte-Tigges begnügt sich mit einer kurzen Betrachtung der Kegelschnitte als Erzeugnisse projektiver Gebilde.

Schließlich seien einige Darstellungen genannt, die das ganze hier in Frage stehende Gebiet durchgehends mit den Begriffen und auch mit den Methoden der Geometrie der Lage durchsetzen. Eine der ältesten Veröffentlichungen dieser Art ist eine Programmabhandlung von Spieker[1]). Nur wenig jünger ist der Leitfaden von Hubert Müller; in Betracht kommt weniger das zweite Heft des ersten Teiles, das bis zu einer kurzen Apollonischen Kegelschnittlehre vordringt, als der zweite Teil. Der Gang ist der folgende: „Die Grundeigenschaften der projektiven Punktreihen und Strahlenbüschel werden benutzt zur Ableitung der Beziehungen der Elemente involutorischer Punktreihen und Strahlenbüschel, der Beziehungen derselben zum Kreisbüschel, der Sätze über Pol und Polare in bezug auf den Kreis. Sodann werden die Kegelschnitte als Erzeugnisse projektiver Strahlenbüschel und in dualer Weise die Gesamtheit ihrer Tangenten als Erzeugnisse projektiver Punktreihen betrachtet. Diese Erzeugnisse projektiver Grundgebilde werden schließlich nach ihren Beziehungen zur unendlich fernen Geraden in verschiedene Arten eingeteilt und diese dann mit den schon im ersten Teil behandelten Kegelschnitten als identisch nachgewiesen."

Erheblich weiter geht Gallenkamp in seinen Elementen der Mathematik (4. Teil, 2. Abschnitt). Er begnügt sich nicht mit den ebenen Gebilden, sondern nimmt auch die Flächen zweiter Ordnung hinzu; denn „kein Gebiet der Mathematik ist in annähernd gleichem Maße geeignet, die Energie der räumlichen Anschauung auszubilden", wie dieses. Zur näheren Kennzeichnung gebe ich die kurze Inhaltsangabe: Harmonische Elemente; Projektive Beziehung der Gebilde erster Ordnung. Erzeugung und Fundamentaleigenschaften der Gebilde zweiter Ordnung in der Ebene und im Strahlenbündel. Polarität. Involution.

1) Th. Spieker, Lineare Construction der Kegelschnitte. Programm d. Städt. Realschule erster Ordnung zu Potsdam. 1867.

Regelscharen und Regelflächen. Kollineation und Reziprozität der ebenen Systeme und der Strahlenbündel. Erzeugung und Polareigenschaften der Flächen und der Ebenenbündel zweiter Ordnung. Reziprozität und Kollineation räumlicher Systeme.

Diese ausführliche Darstellung der projektiven Geometrie bei Gallenkamp dürfte heute für den Unterricht nicht mehr in Frage kommen, sie steht nicht in Einklang mit der zur Verfügung stehenden Zeit. Das ist hingegen wohl der Fall bei einer Reihe anderer Bücher. In dem Lehrbuch von Henrici-Treutlein trägt der Abschnitt über Kegelschnitte den Titel „Abbildung von einer Ebene auf eine sie schneidende Ebene", und das gibt in der Tat das Leitmotiv an, nach dem die Kegelschnittlehre hier behandelt wird. Die Verfasser schließen damit unmittelbar in Stoff und Methode an die Unterstufe ihres Lehrbuches an.

Eine Reihe anderer kleiner Leitfäden hat sich die Aufgabe gestellt, unabhängig vom übrigen Lehrstoff einen Abriß der Geometrie der Lage zu geben; ich nenne den Leitfaden von I. Sachs, die Elemente von K. G. Volk und die von R. Böger, wozu als ältere Erscheinung etwa noch der zweite Teil der Diekmannschen Propädeutik hinzuzufügen wäre.

Es sei der Gedankengang eines solchen kurzen Abrisses im Anschluß an das Buch von Volk angedeutet. Der Verfasser beginnt mit den Grundlagen der Geometrie der Lage (Grundgebilde, uneigentliche Grundgebilde, Gesetz der Reziprozität, perspektive Verwandtschaft). Dann folgen zwei Abschnitte über harmonische Gebilde. Nachdem sodann die projektive Verwandtschaft eingeführt und die Erzeugung einer Kurve durch Wandern eines Punktes bzw. einer Tangente untersucht ist, werden einige Ausführungen über Kegelschnitte, betrachtet als ebene Schnitte durch den Kegel und als geometrische Örter, eingeschoben. Es folgen die Sätze von Pascal und Brianchon, die Feststellung der Identität von Kurven 2. Ordnung, Kurven 2. Klasse und Kegelschnitten, die Lehre von Pol und Polare. In einem Schlußabschnitt wird die Verbindung mit der analytischen Kegelschnittlehre hergestellt.

12. Trigonometrie der Ebene und des Raumes.

Durch die Lehrpläne ist in vielen Fällen (bei den Gymnasien Preußens allerdings seit 1901 nicht mehr) eine Anordnung des Pensums der ebenen Trigonometrie in zwei Stufen bedingt; die Unterstufe, die meist nach Beendigung des planimetrischen Pensums behandelt wird, obwohl sie sich organisch am besten der Ähnlichkeitslehre einfügen würde (so bei Frischauf), soll durchaus propädeutischen Charakter haben. Neben dem damit gegebenen methodischen Unterschied ist ein stofflicher vorhanden. Man beschränkt sich auf der Unterstufe in der Regel auf spitz- und stumpfwinklige Dreiecke und nimmt hier auch nur Sinus- und Cosinussatz, zuweilen wohl auch Tangens- und Halbwinkel-

satz; mit diesen Hilfsmitteln werden dann die vier Fälle von Dreiecksberechnungen erledigt und zur Lösung einfacher Aufgaben verwandt. Auf der Oberstufe werden die trigonometrischen Funktionen allgemein definiert, und die Goniometrie wird auf der Grundlage des Additionstheorems aufgebaut. Die Sätze für das Dreieck werden erweitert durch die sogenannten Mollweideschen Formeln.

Die Definition der trigonometrischen Funktionen knüpft in der Regel an das rechtwinklige Dreieck an, beschränkt sich also zunächst auf spitze Winkel (z. B. Kambly-Roeder), dann werden die Definitionen übertragen auf stumpfe Winkel, etwa wie in Hubert Müllers Elementen durch die Festsetzung, daß Funktionen von Nebenwinkeln absolut gleich, die Vorzeichen bei Sinus (bzw. auch bei cosec) gleich, bei allen anderen Funktionen ungleich sind. Diese Festsetzung wird gegebenenfalls zu begründen sein; das kann in der Weise geschehen, daß man auch hier das in der Arithmetik gebräuchliche Prinzip der Permanenz anwendet (vgl. Abschnitt 16). Man hat etwa den Inhalt eines bei C spitzwinkligen Dreiecks zu $\frac{1}{2}\, ab \sin\gamma$ gefunden. Jetzt richtet man die Definition für stumpfe Winkel so ein, daß die Formel auch weiter richtig bleibt (man sieht sofort, daß man den Sinus im 2. Quadranten positiv wählen muß). Für den Cosinus verfährt man in gleicher Weise, indem man etwa den Cosinussatz zugrunde legt. Diese „künstliche“ Definitionsweise[1]) wird dann angebracht sein, wenn, wie in den Realschulen, die Schüler späterhin die Definition der Funktion für beliebige Winkel nicht mehr kennen lernen. Aber auch wenn das geschieht, läßt sich bei der neuen allgemeinen Definition leicht verifizieren, daß sie mit den früheren für spitze und stumpfe Winkel übereinstimmt. Immerhin ist das für einige Autoren, z. B. Arendt, Boymann, Spieker, Wittstein, Wolff, offenbar der Anlaß, gleich zu Anfang die allgemeinste Definition am Kreis zu geben.

Von den Funktionen wird an erster Stelle in der Regel der Sinus definiert. Schuster beginnt mit dem Tangens, da er nicht durch ± 1 begrenzt ist, praktischer und für den Anfänger anschaulicher ist und besser zum Sinus überleitet als umgekehrt. H. Graßmann stellte den Cosinus an den Anfang, weil dieser „ein Verhältnis darstellt, in welchem nur Stücke der beiden Schenkel des Winkels vorkommen, und daher hier die Zeichenbestimmung auf das einfachste erfolgt“. sec und cosec finden sich nur noch sehr selten in den Schulbüchern (z. B. noch bei Haller von Hallerstein, Spieker, Wittstein).

Von der älteren Auffassung der trigonometrischen Funktionen als Strecken ist in den neuen Lehrbüchern nichts mehr zu finden; von älteren Büchern, die noch längere Zeit an der Streckendefinition festgehalten haben, sei Rummer (1867) angeführt. Wittstein gebraucht

1) Vgl. darüber Th. Häbler, Die Ausnahmslosigkeit beim Definieren trigonometrischer Funktionen. Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 37 (1906), 81.

ausdrücklich den Ausdruck trigonometrische „Zahlen“, denn, so äußert er sich, „der exakte Begriff einer Funktion kann erst in den höheren Teilen der Mathematik gegeben werden“.

Immer mehr bürgert sich heute der Gebrauch ein, den Verlauf der trigonometrischen Funktionen graphisch darzustellen (von älteren Lehrbüchern, die das bereits tun, nenne ich Hammer), ja auch in logarithmisch-trigonometrischen Tafeln (z. B. Rohrbach) begegnet man bereits diesen Darstellungen, welche die Beziehungen zwischen den Funktionswerten von Komplementwinkeln, von Supplementwinkeln und zwischen den Funktionen untereinander sehr viel einfacher abzulesen gestatten als die Streckendarstellungen am Kreis. Zur punktweisen Konstruktion der Kurven, bzw. zur Feststellung der Funktionswerte für einzelne Fälle werden die Funktionen für eine Anzahl Winkel (0^0, 30^0, 45^0, 60^0, 90^0, auch 18^0 usw.) berechnet. Andere, wie z. B. Reidt und Schuster, lassen die Werte der Funktionen auch durch Konstruktion rechtwinkliger Dreiecke mit Hilfe des Transporteurs etwa von 10^0 zu 10^0 finden.

Eine Gruppe von Mathematikern erklärt es für wünschenswert, auf der Unterstufe möglichst ohne Formeln und daneben auch ohne die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen auszukommen. Das wird erreichbar dadurch, daß man die trigonometrischen Aufgaben auch am schiefwinkligen Dreieck jedesmal auf solche am rechtwinkligen Dreieck zurückführt[1]).

In der Regel werden auch der Sinus- und Cosinussatz durch geeignete Zerlegung in rechtwinklige Dreiecke bewiesen, seltener trifft man eine algebraische Herleitung dieser Sätze aus anderen einfacheren. Ich gebe als Beispiel die Ableitung bei Hubert Müller, die ich mit seinen eigenen Worten charakterisiere[2]):

„Bei den geometrischen Beweisen braucht man die Betrachtung an mindestens zwei Figuren 1) bei dem Cosinussatz, 2) bei dem Sinussatz, 3) bei $\sin(\alpha+\beta)$, 4) bei $\cos(\alpha+\beta)$, 5) bei $\sin(\alpha-\beta)$, 6) bei $\cos(\alpha-\beta)$. Ich finde es einfacher, die Fundamentalformeln $a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha$ und $c = a \cdot \cos\beta + b\cos\alpha$ für spitze und stumpfe Winkel abzuleiten und die obengenannten Sätze algebraisch daraus abzuleiten, so daß dieselben auch sofort Gültigkeit für alle im Dreieck vorkommenden Fälle haben. Außerdem glaube ich, daß diese algebraischen Ableitungen dadurch Wert haben, daß der Schüler sie selbst ausführen kann, sobald man ihm den Plan kurz auseinandergesetzt hat. Z. B. bei der Ausrechnung von a^2 für

1) R. Glauer, Die trigonometrische Aufgabe in Untersekunda. Progr. (Städt. Realschule in Erfurt) 1902; schließt sich an Schülke, Trigonometrie ohne Logarithmen, Lehrproben und Lehrgänge Heft 51 (1897) und Schuster, Trigonometrie ohne Formeln, ebenda 52 (1897) an. Vgl. dagegen W. Janisch, Die formelarme und logarithmenlose Methode der Auflösung trigonometrischer Aufgaben. Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 33 (1902), 551.

2) Die Stelle ist einem Briefe von Herrn Müller an mich entnommen und bezieht sich auf die Gestalt, in der die betreffenden Kapitel in der nächsten Auflage seiner Elemente der Trigonometrie erscheinen werden.

den Cosinussatz heißt die kurze Anleitung: fasse a^2 auf als $a^2 \cdot \cos^2 \beta + a^2 \sin^2 \beta$, entnimm $a \cdot \cos \beta$ und $a \cdot \sin \beta$ aus den Grundformeln, quadriere und addiere."

Die Additionstheoreme werden zumeist in der Weise bewiesen, daß an einen Winkel α ein Winkel β angetragen wird und durch Herstellung geeigneter Dreiecke die Beziehungen zwischen den Funktionen von $\alpha + \beta$ und α und β abgeleitet werden. Hier wird der Beweis für beliebige Winkel geliefert. Daß das Additionstheorem in dieser Weise bereits dann abgeleitet wird, wenn die Funktionen nur erst für spitze Winkel definiert sind, ist mir nur einmal (Heger) begegnet. Dort wird dann im Anschluß daran ein Weg angegeben, wie man die Funktionswerte beliebiger spitzer Winkel tatsächlich berechnen kann.[1]) Ein anderer häufiger Beweis des Additionstheorems knüpft an den Satz des Ptolemäus (im Sehnenviereck ist das Produkt der Diagonalen gleich der Summe der Produkte der Gegenseiten) an, er findet sich z.B. bei Mehler, bei Bork-Nath und bei Hessenberg. Schließlich wird das Additionstheorem auch am Dreieck hergeleitet, so machen es beispielsweise Conradt, Hessenberg und, wie oben schon bemerkt, Hubert Müller.

Im weiteren Ausbau der Trigonometrie werden von dem einen lieber geometrisch, von dem anderen lieber algebraisch abgeleitet der Tangenssatz $\left(\text{Ausdruck für } \frac{a+b}{a-b}\right)$ und die Mollweideschen Formeln $\left(\text{Ausdrücke für } \frac{a+b}{c} \text{ und } \frac{a-b}{c}\right)$. Daran schließt sich meist noch eine mehr oder weniger weit ausgeführte Untersuchung der Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln und den Radien der Kreise des Dreiecks, also z. B. wenn r der Radius des Umkreises, ϱ der des Inkreises ist,

$$\varrho = 4\, r \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}.$$

Oft wird auch die halbe Seitensumme

$$s = \frac{a+b+c}{2},$$

eingeführt, also beispielsweise

$$s = 4\, r \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}.$$

Diese Kapitel bieten den älteren Büchern, wie z. B. denen von Reidt, Spieker, ausgedehntes Übungsmaterial. Neuere Bücher lehnen ziemlich einmütig den „Formelkram" ab.

Die sphärische Trigonometrie lehnt sich entweder an die Theorie der Ecken in der Stereometrie an, oder sie folgt dem Stereometriepensum nach. Man findet, analog dem Vorgehen in der Ebene, in der Regel die Dreiteilung: Rechtwinklige Ecke, schiefwinklige Ecke, Anwendungen (so

1) Der Leitfaden von Heger zeichnet sich überhaupt durch eine Reihe neuer methodischer Ideen aus. Es sei hier nur die Einführung der Richtungsgleichheit ([illegible]) von Winkeln erwähnt. So ist beispielsweise 0° [illegible] 360°.

z. B. Thieme, Kambly). Wird diese Reihenfolge eingehalten, wobei die zehn Formeln zwischen Winkeln und Seiten der rechtwinkligen Ecke in die Nepersche Regel zusammengezogen werden können, so führt man Sinus- und Cosinussatz für das schiefwinklige sphärische Dreieck auf das rechtwinklige zurück. Beginnt man dagegen (z. B. Spieker) gleich mit dem allgemeineren Fall, so werden die Beweise natürlich direkt aus der Betrachtung der Ecke erschlossen. Auf den preußischen Gymnasien ist damit die Zahl der Lehrsätze erschöpft. Recht oft begnügt man sich sogar mit dem Cosinussatz allein.

An den realistischen Anstalten, gelegentlich wohl auch einmal an Gymnasien werden dann außer Sinus- und Cosinussatz, dem zuweilen ein „zweiter" Cosinussatz

$$\cos \alpha = \sin \gamma \cdot \sin \beta \cdot \cos a - \cos \beta \cdot \cos \gamma$$

an die Seite gestellt wird, häufig noch abgeleitet die Halbwinkelsätze, die Gaußschen (zuweilen auch nach Delambre oder Mollweide benannten) Gleichungen

$$\cos \frac{\alpha - \beta}{2} : \sin \frac{\gamma}{2} = \sin \frac{a + b}{2} : \sin \frac{c}{2}$$

usf. und die Neperschen Analogien, die durch Division je zweier entsprechender Gaußscher Gleichungen entstehen. Dazu kommt dann noch der Ausdruck für den Flächeninhalt des sphärischen Dreiecks. Weitergehende Sätze werden im System selten abgeleitet, höchstens wird etwa auf den In- und Umkreis und die Ankreise des sphärischen Dreiecks eingegangen.

13. Die trigonometrische Aufgabe. Praktische Geometrie.

Unter den der Trigonometrie angeschlossenen Aufgaben spielen zunächst zwei Gruppen eine Rolle, die von den anderen isoliert sind und überhaupt mehr formalen als praktischen Wert haben, die „Trigonometrischen Gleichungen" und die „Goniometrischen Aufgaben", d. h. Aufgaben, welche Umwandlungen goniometrischer Ausdrücke in andere verlangen.

An der Spitze der eigentlichen Anwendungen der Trigonometrie stehen die den vier Kongruenzfällen entsprechenden Grundaufgaben; ihre Erledigung hängt von den zur Verfügung stehenden Lehrsätzen ab. Manche Verfasser sind bestrebt, in der Ebene und auf der Kugel möglichst mit Sinus- und Cosinussatz auszukommen. Andere wieder verwenden mit Rücksicht auf die logarithmische Rechnung mit Vorliebe Mollweidesche Formeln und dgl.; Schuster vermeidet den Cosinussatz zunächst ganz und gar. Nun schließen sich, ebenso wie an die Kongruenzfälle die Dreieckskonstruktionen, so hier die mehr oder weniger „schwierigen" Dreiecksberechnungen an. Es werden auch gelegentlich (so bei Conradt) methodische Anleitungen zur Auflösung schwierigerer Dreiecksaufgaben gegeben. Eine systematische Zusammenstellung von 305 solchen Auf-

gaben und ihren Lösungen gibt W. Madel. Dann schließt sich zuweilen die Polygonometrie an, die Berechnung von Vier- und Vielecken.

Bei der wirklichen Durchführung der Berechnungen spielt die rechnerische Praxis eine große Rolle. Man findet deshalb in älteren wie in neueren Lehrbüchern darauf großen Wert gelegt; besonders sind das umfangreiche Werk von Hammer und die neuerdings von Thieme herausgegebene Aufgabensammlung von Reidt zu nennen. Rechenschemata findet man in einer ganzen Anzahl von Lehrbüchern der Trigonometrie.

Es herrscht heute, wie das eingehender noch bei den Logarithmen zur Sprache kommen wird, die offensichtliche Tendenz, von dem früheren vielstelligen (meist 7-stelligen) Rechnen zu weniger genauem (4-stelligem, in manchen rein praktischen Fällen gar 3-stelligem) Rechnen überzugehen. Führer dieser Bewegung sind besonders A. Richter, Schülke und Thaer. Damit hängt es zusammen, wenn jetzt mehr Wert auf Abschätzungen der Genauigkeitsgrenzen und Fehlerbestimmungen bei den Rechnungen gelegt wird, die zwar schon früher zuweilen (z. B. bei J. G. F. Müller, Baltzer, Helmes) nicht fehlten, deren Wichtigkeit aber immer mehr anerkannt wird.

Alle diese Dinge haben eine weitergehende Bedeutung, wenn man sie unter dem Gesichtspunkt der praktischen Anwendungen in der Geometrie überhaupt betrachtet. Früher war der Glaube an den formalen Zweck des Mathematikunterrichtes, wie er sich etwa in der alten Fassung von Reidts Anleitung ausspricht, vorherrschend. Der mathematische Unterricht hatte nach dieser Ansicht die Aufgabe, die Fähigkeit zum logischen Denken und zur abstrakten räumlichen Anschauung heranzubilden und zu fördern; die Anwendungen kamen erst in zweiter Linie in Betracht. Zwar erklärte es Helmes für wünschenswert, zu zeigen, „daß man mit der Mathematik auch etwas machen kann", und brachte also auch in der Trigonometrie Anwendungen aus den verschiedensten Gebieten, und selbst Wittstein, sonst einer der strengsten Verfechter des formalen Prinzips, meinte, es bedürfe kaum der Bemerkung „wie zweckmäßig es ist, statt der hier (in seinem Lehrbuch) gegebenen abstrakten Rechnungsbeispiele solche zu wählen, welche irgendwelchen Anwendungen der Mathematik entnommen sind, z. B. der praktischen Geometrie, der Geographie, der Astronomie etc." Er selbst verzichtete aber auf solche Beispiele, „weil dieselben zuviel erläuterndes Detail erfordert haben würden."

In letzter Zeit hat sich in dieser Hinsicht ein entschiedener Umschwung vollzogen, eine Folge nicht zum wenigsten der modernen Entwicklung der Technik und des technischen Hochschulwesens und der damit Hand in Hand gehenden angewandten Mathematik. Man denkt auch in der Mathematik utilitaristischer. Es ist recht bemerkenswert, daß man gerade auf die Unterrichtsfächer hingewiesen hat, die in der Betonung formaler Ziele der Mathematik glichen, auf die alten Sprachen. „Obwohl die Beibehaltung der alten Sprachen häufig durch formale Bil-

dung begründet wird, so sorgen doch gerade die Vertreter dieser Fächer dafür, daß die Schüler eine Fülle von sachlichen Belehrungen aus dem Gebiete der Poesie, der bildenden Künste, der Geschichte, der Staatsverwaltung usw. erfahren. Deshalb dürfen die Anwendungen nicht allein die Einkleidung eines mathematischen Gedankens enthalten, sondern sie müssen auch für sich anregend und bedeutend erscheinen." (Schülke.)

In der Trigonometrie haben praktische Aufgaben wohl nie ganz gefehlt; arg vernachlässigt war dagegen lange Zeit die praktische Seite der planimetrischen Konstruktionsaufgaben. Wir wollen daher zunächst einiges über die praktische Anwendung der der trigonometrischen Aufgabe wesensverwandten planimetrischen Konstruktionsaufgabe nachtragen. In erster Reihe sind hier Kretschmer und Degenhardt zu nennen, wenngleich auch sie aus älteren Lehrbüchern schöpfen konnten, beispielsweise aus Rummer 1850 (dort findet sich ein umfangreicher Abschnitt über „praktische Geometrie").

Die geometrischen Konstruktionsaufgaben sollen im „Alltagsgewand" (Walther) erscheinen. Da wird schon in der Quarta beispielsweise die Frage aufgeworfen: Wie hoch ist ein Kirchturm? Die Länge des Kirchturmschattens und die Höhe der Sonne werden vom Schüler selbst gemessen, und danach wird in verkleinertem Maßstabe das gesuchte Stück konstruiert. Daß hier die Ähnlichkeitslehre hineinspielt, die der Schüler noch nicht kennt, macht nichts aus; er ist ja auch an Vergrößerung und Verkleinerung durch die parallelgehenden Figuren an der Wandtafel und in seinem Heft gewöhnt. In ähnlicher Weise liefert etwa ein Schülerausflug die Daten zu folgender (der sogenannten Hansenschen) Aufgabe: Von einer angenähert geradlinigen Chaussee sieht man zur Rechten zwei Kirchtürme. Wie kann man ihre Entfernung konstruieren, ohne die Chaussee zu verlassen?

Die Beispiele zeigen schon, daß besonders die Feldmeßkunst und die Höhenmessung geeignete Sachgebiete für solche Aufgaben sind.

Die Schulbücher tragen diesen Bestrebungen immer mehr Rechnung; besonders auf die praktische Bedeutung der verschiedenen Kongruenzfälle wird vielfach hingewiesen (z. B. Behrendsen-Götting, Bork-Crantz-Haentzschel, Walther). Dabei wird die Verwendung praktischer Maß- und Zeichenapparate im Unterricht gestreift; so berücksichtigte schon Helmes Winkelhaken, Nonius, verjüngten Maßstab (die Instrumente, die uns in den Geometriebüchern des 17. und 18. Jahrhunderts so häufig begegnen), dann in der Ähnlichkeitslehre den Storchschnabel, der, um auch neuere Beispiele zu nennen, bei Bork-Crantz-Haentzschel, bei Behrendsen-Götting u. a. besprochen wird. Besonders ausführlich kommt die Benutzung solcher Apparate natürlich in dem Lehrbuche von Henrici-Treutlein zu Wort, das von Anfang an die Beweglichkeit der Figuren in den Mittelpunkt stellt (vergl. Abschnitt 9).

Hand in Hand mit dem Eindringen der praktischen Anwendungen in die Planimetrie geht eine weitere Ausgestaltung der angewandten

trigonometrischen Aufgabe, in der Ebene wie auf der Kugel. Von den eifrigen Förderern dieser Bestrebungen seien genannt A. Richter, Schülke, Schuster und Martus (Raumlehre, 2. Teil). Die Aufgabensammlungen der erstgenannten sind bahnbrechend gewesen, haben sie doch die Aufgabensammlungen ganz allgemein dahin beeinflußt, daß die nach Sachgebieten geordneten Aufgabengruppen (vgl. etwa Schultze-Pahl, Müller-Kutnewsky) immer umfangreicher wurden. Andererseits haben einige Lehrbücher in der Weise reagiert, daß sie auch auf die Beobachtungsmethoden eingehen. So findet man Abbildungen von Theodoliten u. dgl. (Fenkner); Kreuschmer, der Herausgeber des für die Unterstufe bestimmten Lackemannschen Leitfadens, beschreibt sehr ausführlich für die Hand des Schülers bestimmte Winkelmeßapparate.[1]) Überhaupt wird mehrfach empfohlen, die Einführung in die Trigonometrie im Anschluß an Messungen im Freien oder auf dem Schulhof vorzunehmen (vgl. den Leitfaden von Rehfeld).

Die Anzahl der Anwendungsgebiete hat sich vermehrt. Ehedem waren es fast ausschließlich die Feldmessung und in der sphärischen Trigonometrie einige spezielle Aufgaben der mathematischen Himmelskunde, wobei denn gerade dieses Bindeglied von Mathematik und Physik eine weitere Ausgestaltung erfahren hat; besondere Lehrbücher für diesen Zweig, wie etwa das von Martus, geben davon Zeugnis. Um einen Begriff von der gegenwärtigen Mannigfaltigkeit zu geben, stelle ich nach Schülkes Sammlung einige Aufgabengruppen zusammen: Größe und Entfernung der Himmelskörper; Bewegung der Planeten; Konjunktion und Opposition; Auf- und Untergang der Planeten; tägliche Bewegung der Gestirne; jährliche Bewegung der Sonne; Stellung der Fixsterne; astronomische Ortsbestimmung. Aus der Physik wird in der Regel das Gesetz vom Kräfteparallelogramm ausgenutzt. Ziemlich jung ist die Heranziehung der Nautik, die zuerst A. Richter in seiner Sammlung in umfangreicherem Maße berücksichtigt hat.

In engster Beziehung steht die Trigonometrie in ihren Anwendungen mit der Stereometrie, der wir uns jetzt zuzuwenden haben.

14. Stereometrie: Lehrstoff.

Der Lehrstoff der Stereometrie zerfällt in zwei Gebiete, die man mit Focke-Kraß als die Lehre von den ungeschlossenen und von den geschlossenen stereometrischen Gebilden einander gegenüberstellen kann. Im ersten Teile sind die grundlegenden Sätze über die gegenseitigen Beziehungen von Ebenen und Geraden zu behandeln. Die Einleitung gibt, wie früher schon einmal erwähnt, einigen Autoren (z. B.

1) R. Kreuschmer, Der Universal-Winkelmeßapparat. Breslau. (Hirt.) 1903, vergl. auch Lackemann, Teil 2 und R. Kreuschmer, Das Additionstheorem der Winkelfunktionen und die Änderungen der Funktionswerte mit dem sich ändernden Argument am neuen Transporteur für Winkelfunktionen. Progr. Realschule Barmen 1909.

Thieme) erwünschte Gelegenheit, auf einige Axiome und damit auf die Axiomatik überhaupt hinzuweisen. Die überwiegende Mehrzahl der Bücher jedoch geht auf diese Dinge nicht ein, die Axiome werden ohne besondere Angabe der Anschauung entnommen oder durch die selbstverständliche Benutzung der Kinematik ersetzt; nur der später noch zu berührende Grundsatz des Cavalieri wird zumeist, ähnlich wie das Parallelenaxiom in der Planimetrie, als einziges Axiom angeführt.

Über den Inhalt des ersten Teiles orientiere etwa die Disposition des Wrobelschen Leitfadens: 1. Gerade und Ebene in ihren Beziehungen zueinander. a. Senkrechte, b. Geneigte, c. Parallele Gerade zu einer Ebene, d. Schnitt von zwei Ebenen, e. Parallele Ebenen, f. Drei Ebenen; 2. Körperliche Ecken.

Die Wertschätzung dieser Teile der Stereometrie ist bei den einzelnen Fachkollegen eine sehr verschiedene. Die einen verhalten sich mehr oder weniger ablehnend, weil sie zu abstrakt seien; andere sehen gerade das Üben an abstrakten geometrischen Gebilden als bestes Mittel an, die Fähigkeit der räumlichen Anschauung zu entwickeln. Daß die Förderung dieses Zieles der Mathematik eines der wichtigsten ist, darüber war man sich schon in der Zeit einer noch rein auf das Formale gerichteten Methodik einig, daß aber die Wertschätzung noch immer weiter gewachsen und durch den Hinweis auf die praktischen Anwendungen vertieft ist, wie das auch in den Lehrplänen zum Ausdruck gekommen ist, dürfte in erster Linie das große und bleibende Verdienst von Holzmüller sein. Auch die Vorschläge der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte[1]) haben wiederum nachdrücklichst auf „die Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens" hingewiesen.

In der Lehre von den Körpern macht meist ein Abschnitt über allgemeine konvexe Körper den Beginn. Es wird hier der Eulersche Satz über die Invarianz von $e - k + f$, wo e die Zahl der Ecken, k die der Kanten, f die der Flächen bedeutet, für den einfachsten Fall bewiesen. Man schätzt diesen Satz nicht überall gleich ein (Reidt z. B. bringt den Abschnitt nur im Anhang), obwohl eine wichtige Folge daraus die Untersuchung der Anzahl regulärer (Platonischer) Körper ist. Die Gelegenheit, hier auf andere Gruppen von Polyedern hinzuweisen und so einen Ausblick auf die Analysis situs zu geben, wird von den Lehrbüchern selten ausgenutzt, Ansätze dazu finden sich z. B. bei Hauck-Kommerell und in dem älteren Leitfaden von Oppel.

Ist bisher von den „Gestalten des Raumes" die Rede gewesen, so wendet man sich jetzt den „Größen des Raumes" zu. Bei den speziellen Körpern wird in der Regel gleich die Berechnung der Oberflächen, der Inhalte, zuweilen auch der Neigungswinkel, Diagonalen u. dgl. in

1) Vergl. A. Gutzmer, Die Tätigkeit der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte. Gesamtbericht. Leipzig. (Teubner.) 1908.

Angriff genommen. Eine Ausnahme machen Hauck und Kommerell, die sich übrigens bei den nicht von Ebenen begrenzten Körpern auf Umdrehungskörper beschränken: sie leiten zunächst einige allgemeine Eigenschaften der Körper ab.

Bei der Berechnung der Oberflächen und Inhalte tritt bekanntlich die Schwierigkeit auf, daß bestimmte Integrale in elementarer Weise auszuwerten sind. Bei Quadern u. dgl. und bei dem Übergang von dem dreiseitigen Prisma zur dreiseitigen Pyramide kommt man mit Zerlegungsgleichheit aus, die im Falle der erstgenannten Körper zuweilen (z. B. bei Bork-Nath, Hauck-Kommerell), im Falle der dreiseitigen Pyramide fast immer benutzt wird. Andere führen außerdem den Grenzübergang bei der Pyramide (aufeinander geschichtete immer kleiner werdende flache Prismen) direkt durch (z. B. Reidt, Boymann). Dabei empfiehlt es sich vielleicht, den Grenzübergang zunächst einmal am Dreieck (als Summe von Trapezen oder Recktecken) auszuführen.

Im weiteren wird dann von der einen Gruppe das sogenannte Cavalierische Prinzip[1]) angewandt (zwei Körper sind raumgleich, wenn sie zu einer Ebene in eine solche Lage gebracht werden können, daß die in beliebigen, aber gleichen Entfernungen von dieser Ebene konstruierten, der Ebene parallelen Durchschnittsfiguren einander gleich sind). Dieser Satz gestattet dann, nachdem zuvor der Zylinder- und Kegelinhalt erledigt, den sogenannten Archimedischen Satz über den Inhalt der Halbkugel zu beweisen. Ein anderer Weg, die Kugel der Berechnung zu erschließen, ist die Durchführung der Oberflächenintegration bei einer Kugelzone, indem man diese als Summe von Kegelstumpfmänteln ansieht. Diesen Weg gehen Koppe-Diekmann, Reidt, Schwering und viele andere. Die Beziehung zwischen Oberfläche O und Inhalt J der Kugel wird durch einen andern Grenzübergang hergestellt: man betrachtet die Kugel als Summe unendlich vieler Pyramiden mit dem Kugelradius als Höhe, deren Grundflächen die Oberfläche der Kugel bilden, und hat dann die Gleichung

$$J = \frac{O \cdot r}{3}.$$

Unter den besonderen Körpern, die neben Zylinder, Prisma, Kegel, Pyramide, Kegelstumpf, Pyramidenstumpf und Kugel noch betrachtet werden, kehrt in fast allen Lehrbüchern das Prismatoid wieder. Ein Prismatoid ist ein Polyeder, dessen Grundflächen zwei beliebige parallele

1) Eine allgemeinere Methode geometrischer Integration, die das Cavalierische Verfahren als Spezialfall in sich schließt, hat J. Finsterbusch, Geometrische Integrationen. (32. Jahresbericht des Vereins für Naturkunde zu Zwickau. Leipzig. (Teubner.) 1903.) entwickelt. Dabei vergleicht er nicht nur wie Cavalieri zwei Körperinhalte J_1 und J_2, von denen J_1 gesucht, J_2 bekannt ist, und wobei dann $dJ_1 = dJ_2$ ist, sondern drei, wobei etwa J_1 der gesuchte, J_3 der bekannte ist und J_2 so eingeschaltet wird, daß z. B. $dJ_1 - dJ_2 = dJ_3$ und gleichzeitig $J_1 : J_2$ bekannt, J_1 und J_2 also bestimmbar ist.

Polygone und dessen Seitenflächen im allgemeinen Dreiecke sind, welche mit je einer Grundfläche eine Seite und mit der anderen einen Eckpunkt gemein haben. Die Theorie dieses Körpers, den schon Steiner untersucht hat, ist von Wittstein entwickelt worden, und seitdem ist fast zugetroffen, was Wittstein hoffte, daß nämlich dieser Körper „ein unverlierbares Eigentum unserer Lehrbücher“ sein werde; ob auch des Unterrichts, lasse ich dahingestellt. In der Tat begegnet man dem Prismatoid heute noch außerordentlich häufig, ich nenne nur Kambly-Roeder, Koppe-Diekmann, Lieber-von Lühmann; ja Heinze hat, von einer Verallgemeinerung des Prismatoids, dem Zentralkörper[1]), ausgehend, eine allgemeine, wie er schreibt, genetische Stereometrie aufgebaut. Spezielle Fälle des Prismatoids sind der Sphenisk (Keil, eine Grundfläche ist in eine Gerade zusammengeschrumpft) und der manchmal recht ausführlich behandelte (z. B. bei Wrobel) Obelisk, von dem wieder der Pyramidenstumpf ein Spezialfall ist.

Für das Volumen des Prismatoids ergibt sich eine einfache Formel

$$V = \frac{h}{3}(M + 2D),$$

wo h die Höhe, M das arithmetische Mittel der beiden Grundflächen und D der Mittelschnitt ist. Dieser unter dem Namen Newton-Simpsonsche Formel bekannte Ausdruck kehrt noch bei vielen anderen Körpern wieder. Das Prismatoid ist ein spezieller Fall des sogenannten Simpsonschen Körpers. Dieser ist ein (im allgemeinen) von zwei ebenen und parallelen Figuren als Grundflächen und von ebenen oder krummen Flächen als Seitenflächen begrenzter Körper der Art, daß der Flächeninhalt eines der einen Grundfläche parallelen Schnittes eine Funktion höchstens 3. Grades des Abstandes dieser Fläche von jener Grundfläche ist. Zu den Simpsonschen Körpern gehören u. a. die Rotationsellipsoide, – paraboloide und – hyperboloide, deren Volumen sich auf diese Weise berechnen läßt. Die Newton-Simpsonsche Formel findet sich in vielen Lehrbüchern. (Vgl. besonders Koppe-Diekmann und Holzmüller).

Ein weiteres Kapitel, das hier noch zu nennen wäre, ist die an die Guldinsche Regel[2]) anschließende Berechnung von Rotationskörpern (vgl. Bork-Nath, Koppe-Diekmann, Lieber-von Lühmann u. v. a.).

---

1) „Der Zentralkörper hat zwei parallele ebene Flächen als Grundflächen; jeder Eckpunkt der einen Grundfläche ist entweder nur mit dem korrespondierenden Eckpunkt der anderen oder sowohl mit dem korrespondierenden als auch mit dem benachbarten verbunden; die Seitenflächen entstehen dadurch, daß sich an je zwei benachbarten Seitenkanten Gerade parallel zu den Grundflächen fortbewegen. Die Seitenkanten sind gerade oder solche krumme Linien, die ein bestimmtes geometrisches Bildungsgesetz haben.“

2) Der Inhalt eines durch Drehung einer ebenen Fläche um eine in derselben Ebene liegende Gerade entstandenen Umdrehungskörpers ist gleich dem Produkt aus dem Inhalt der Fläche und dem von ihrem Schwerpunkt beschriebenen Kreise. Wird in entsprechender Weise eine ebene Linie um eine in derselben Ebene liegende Gerade gedreht, so ist die von ihr beschriebene Oberfläche wieder gleich dem Produkt aus der Länge der Linie und dem von ihrem Schwerpunkte beschriebenen Kreise.

15. Stereometrie: Methode.

Nach diesen Andeutungen über den Lehrplan in der Stereometrie ist noch einiges über die Unterrichtsmethode hinzuzufügen. Wir haben früher gelegentlich der Propädeutik der ebenen Geometrie darauf hingewiesen, daß in diesem Kapitel in der Regel insofern eine Fusion mit der räumlichen Geometrie vorhanden ist, als auch räumliche Gebilde zur Sprache kommen. Von einer weiteren Beibehaltung ist nun in den heutigen Lehrbüchern nirgends die Rede (vgl. jedoch über eine Bemerkung von Henrici-Treutlein Abschnitt 9). Dagegen führen von den älteren deutschen Lehrbüchern einige die Fusion durch, nämlich C. A. Bretschneiders Lehrgebäude der niederen Geometrie[1]) und Frischaufs durchaus modern gehaltene Elemente der Geometrie[2]). Wenn heute derartige Lehrbücher ganz fehlen, so ist das eine Folge der Lehrplanbestimmungen. Für die Fusion, die bekanntlich in Italien recht viele und auch in Frankreich einige Anhänger zählt, hat sich in Deutschland neuerdings besonders Schülke ausgesprochen[3]). Tatsächlich wird ja schon der planimetrische, später dann der trigonometrische Unterricht vielfach Anwendungen auf Körperbegrenzungen, Körperdiagonalen u. dgl. heranziehen.

Von grundlegender Bedeutung für den Unterricht ist die mehrfach durch die Lehrpläne vorgeschriebene Gliederung des Stereometriepensums in eine Unterstufe und eine mehr systematische Oberstufe. In vielen Fällen wird auf der Unterstufe, für die zuweilen ganz ebenso wie in der Trigonometrie besondere kleine Leitfäden existieren, wie die von Reidt, Focke-Kraß, Schwering, nur von geschlossenen Körpern gehandelt. Ja, es wird manchmal (Schwering) gar auf eine regelrechte Ableitung der Inhalts- und Flächenformeln verzichtet, sie werden nur plausibel gemacht oder in anderen Fällen nachträglich „bestätigt". Wenn auf der Unterstufe auch auf die Beziehungen von Geraden und Ebenen eingegangen wird, so geschieht es meist ganz in propädeutisch-anschaulicher Form. Schwering greift die Lote auf Ebenen heraus, bei Schuster werden die Beziehungen erst an geeigneten Körpern aufgesucht und dann erst in losgelöster Form besprochen (z. B. Ebene und Lot dazu an Höhe und Grundebene einer Pyramide). Einige für Realschulen bestimmte Bücher über Stereometrie, wie die von Böttgers, Wehner, der zweite Teil der Lackemannschen Geometrie, übrigens auch Heinrich Müller, gehen allerdings schon auf der Unterstufe systematisch auf Gerade und Ebene ein.

Da „die Stereometrie ihrem Wesen nach einen durchaus anschaulichen Unterricht verlangt" (Schwering), so wird vielfach auf räumliche

---

1) Jena. (Manke.) 1844.

2) Leipzig. (Teubner.) 1877.

3) Schriften der Phys.-Ökonom. Gesellschaft zu Königsberg i. Pr. **49** (1908), pg. 63. Auch Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. **39** (1908), 442.

Modelle hingewiesen. Es ist hier nicht der Ort, darauf einzugehen, welche Modelle in den Schulen im Gebrauch sind.

Daneben kommen gerade hier Anwendungen auf das wirkliche Leben in Betracht. „In den sehr abstrakten Gebieten der Lage von Punkten, Geraden und Ebenen werden sowohl an das räumliche Anschauungsvermögen als an die logische Urteilskraft der Schüler höhere Anforderungen gestellt; deshalb wurden gerade hier gegen die Übung theoretischer Lehrbücher der Mathematik Hinweise auf Vorkommnisse und Anwendungen im Leben eingestreut... Dem einen werden freilich diese Einstreuungen als Entweihung der strengen Wissenschaft erscheinen, während ein anderer darin vielleicht bloß den dürftigen Versuch sieht, die graue Theorie mit dem grünen Baum des Lebens zu vereinen" (Henrici-Treutlein).

Von manchen älteren Lehrbücherverfassern werden exakte Zeichnungen höher eingeschätzt als Modelle; Hauck meint: „Eine rationelle Darstellungsmethode scheint mir in dieser Beziehung noch wichtiger zu sein als Modelle", und auch Helmes verwirft Modelle und weist gleichfalls auf Zeichnungen hin. Die räumliche Vorstellung sei „frei nach der Phantasie"! Immerhin kann man diesen Standpunkt wohl als veraltet bezeichnen. Bei der Besprechung der darstellenden Geometrie wird noch einmal auf die Zeichnung räumlicher Gebilde zurückzukommen sein.

Über die Beweise der stereometrischen Sätze ist Ähnliches zu berichten wie in der Planimetrie. Der Analyse von Beweisen (Kretschmer, Wehner), der Angabe von Beweismitteln (Fenkner) begegnen wir auch hier. Wichtig sind Hinweise auf Analogien zwischen ebenen und räumlichen Gebilden (Wehner).

Die stereometrische Aufgabe (eine der umfangreichsten Sammlungen ist die zuletzt von Much herausgegebene von Reidt) beschränkt sich vielfach auf die Ausführung von Berechnungen, wobei derartige Ansätze gern benutzten Anwendungsstoff für die Algebra (Gleichungen zweiten und dritten Grades, Maxima und Minima usw.) und die Trigonometrie geben. Daneben aber erscheint anderen die Ausführung geometrischer Konstruktionen wertvoller (z. B. Spieker); besonders die an die Konstruktion von Senkrechten zu einer Ebene, an die dreiseitige Ecke usf. anschließenden Aufgaben sind in den meisten Büchern vertreten. Wesentlich diesen für „die intensive Ausbildung des Anschauungsvermögens" wichtigsten Aufgaben ist die von Thieme herausgegebene, teilweis auf Kretschmer zurückgehende Aufgabensammlung gewidmet. „Gerade die Fähigkeit klarer räumlicher Anschauung, die Fähigkeit exakter Zergliederung räumlicher Anschauungen ist es, welche die Studierenden der Mathematik, der Technik, der Naturwissenschaften und der Medizin brauchen, welche jeder braucht, der sich mit Naturwissenschaften beschäftigen will, und diese Fähigkeit wird nur gewonnen durch Lösen konstruktiver stereometrischer Aufgaben und durch Beweisen stereome-

trischer Lehrsätze". Praktische Anwendungen liefert für die Stereometrie vor allem die Kristallographie (siehe besonders das Lehrbuch von Sauerbeck). Umgekehrt wird natürlich auch der Unterricht in der Kristallographie gern auf die Stereometrie zurückgreifen. Eine gegenseitige Rücksichtnahme ist hier wie in allen solchen Fällen sehr angebracht.

Mit der Stereometrie in engster Verbindung steht die darstellende Geometrie, derart, daß im Unterricht sich beide gegenseitig ergänzen. Im Lehrbuch sind beide Gebiete meist getrennt behandelt, wohl eine Folge der geschichtlichen Entwicklung, welche die darstellende Geometrie erst sehr spät in den Lehrstoff der Schule hat eintreten lassen. Als Beispiel einer Vereinigung beider Gebiete weise ich auf das Lehrbuch von Heinrich Müller und A. Witting hin.

16. Darstellende Geometrie.

Der pflichtmäßige Unterricht der höheren Schulen beschränkt sich in der darstellenden Geometrie meist auf schräge und senkrechte Parallelperspektive, in manchen Fällen tritt die Zentralperspektive, auch die Schattenlehre hinzu. Bis zur Axonometrie wird man selten kommen; ein Kapitel über „die grundlegenden Konstruktionen der orthographischen Axonometrie" findet sich im dritten Teile der Elementarmathematik von Holzmüller.

Wie weit in die senkrechte Parallelperspektive einzudringen ist, die im Mittelpunkt des Unterrichts der darstellenden Geometrie zu stehen pflegt, darüber sind die Meinungen geteilt. Müller-Hupe z. B. schränkt das Pensum sehr ein, er verzichtet auf den Seitenriß und auf die Darstellung von Körpern, so daß also nur Geraden, Ebenen und ebene begrenzte Figuren behandelt werden: „Der Versuchung, den Gegenstand ausführlicher zu behandeln und die Aufgabe der Hochschule zum Teil vorweg zu nehmen, haben wir widerstanden in der Gewißheit, daß dabei der Mehrzahl der Schüler das Gefühl der Sicherheit nicht entstehen könne." Gercken geht wie die meisten Autoren bis zu den Körpern vor, beschränkt sich hier aber auf ebene Schnitte und verzichtet auf Durchdringungen. Er ist übrigens einer der wenigen, der neben Zentralperspektive auch einiges über Schattenkonstruktion bringt. Andere Autoren fügen schließlich noch einige wenige Körperdurchdringungen hinzu (z. B. Koppe-Diekmann, Thieme), in der Absicht, von diesen Aufgaben und ihrer Erledigung wenigstens einen Begriff zu geben. Das umfassendste Schulbuch über darstellende Geometrie ist C. H. Müller-Preslers Projektionslehre. Schmehls Elemente gehen etwas über den Lehrstoff der höheren Schulen hinaus.

Wie in der Trigonometrie und der Stereometrie, so haben wir auch hier eine Gliederung des Stoffes in Unter- und Oberstufe. Die Unterstufe umfaßt vor allem die schräge Perspektive; von einigen Körpern

werden wohl auch schon Grund- und Aufriß gezeichnet. In der Oberstufe tritt dann die Orthogonalprojektion in ihre Rechte, wobei zur Veranschaulichung stets die schräge Perspektive herangezogen wird. Für die realistischen Schulen liegt in Preußen die Unterstufe in Untersekunda (Beispiel eines Lehrganges: Bork-Nath, Schluß des 1. Teiles; für bayrische Realanstalten: F. Dicknether), für die gymnasialen Schulen in Prima (Beispiel eines Lehrganges: das Heft von Schütte). Die Oberstufe fällt für die Gymnasien fort, während sie in den Realanstalten in Prima oder auch in einzelnen Fällen in Abweichung von den offiziellen Lehrplänen in Obersekunda liegt.

Was die Art der Stoffbehandlung anlangt, so überwiegt die Darstellung an der Hand von Aufgaben. Nur selten wird besonderer Wert auf Herausarbeitung von Lehrsätzen gelegt. Alle Bücher geben die Fundamentalaufgaben in ausführlicher Darstellung, reiches Aufgabenmaterial enthält Beyel, der die gegebenen Größen, auf geeignete Koordinaten bezogen, in Zahlenwerten angibt. Dieses Buch legt Nachdruck auf exakte Ausführung der Zeichnungen (im Buche selbst ist keine einzige Zeichnung ausgeführt), es werden z. B. für einzelne Aufgaben Genauigkeitsproben angegeben.

Nach der Seite der Anwendungen ist das instruktivste Buch das von Müller-Presler. Ich gebe eine kleine Blütenlese der verschiedenen Sachgebiete. Bei Schrägbildern und Grundriß-Aufrißmethode werden Beispiele gewählt aus der Stereometrie, der Kristallographie, der mathematischen Erd- und Himmelskunde (Sonnenuhr, Drehung der Erde um die Sonne in schiefwinkliger Parallelperspektive, orthogonale und zentrale Kartenprojektionen bis zum Entwurf einer Merkatorkarte), aus der Botanik und Zoologie (Keilschnitt eines Laubholzes, Gefäße, Blattstellung, Bienenzelle) der Physik (Zungenpfeife, Strahlengang in einer Lochkamera, beim Prisma, Doppel T-Anker, Tangentenbussole usw.), der Chemie (Gebilde aus der Stereochemie); Bergwerksaufgaben bieten Anwendungen für die Darstellung unbegrenzter Geraden und Ebenen. Aus dieser Aufzählung erhellt ohne viele Worte, daß das Buch ein „nützlicher Begleiter und Ratgeber für alle Fächer ist, in denen geometrische Zeichnungen gefordert werden."

Aber nicht nur der Schüler, sondern ebenso der Lehrer und der Schulbuch-Verfasser haben für ihre Zeichnungen von der darstellenden Geometrie zu lernen. Wieviel besonders die räumlichen Figuren auch mathematischer Schulbücher zu wünschen übrig lassen, ist von Kullrich in einem Aufsatze[1]) eindringlich dargestellt worden. Es gibt eine ganze Anzahl für Lehrer bestimmter Anleitungen zum Zeichnen räumlicher Gebilde; mehr praktischer Natur sind die Bücher von Holzmüller und Schoenflies, mehr theoretisch „Kreis und Kugel" von Richter. Einen

1) E. Kullrich, Bemerkungen über die Figuren des mathematischen Schulunterrichts. Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. 38 (1908), 16.

Überblick über das weite Gebiet der Anwendungen gibt dem Lehrer das sehr reich mit Abbildungen ausgestattete, auch durch seine Literaturangaben wertvolle Werk von Schilling[1]).

Es ist noch ein kurzes Wort über das Linearzeichnen zu sagen, genaueres wird wahrscheinlich ein besonderer Bericht der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission bringen. Es gibt Schulen, an denen die ganze darstellende Geometrie im Linearzeichnen, also an der Hand der praktischen Übungen gelehrt wird (z. B. die Sächsischen Oberrealschulen). Wo, wie das meistens der Fall, das Linearzeichnen wahlfrei ist und die darstellende Geometrie in den mathematischen Pflichtstunden erledigt wird, hat das Linearzeichnen zunächst die zeichnerische Durchbildung der Schüler zur Aufgabe. Gelegentlich begegnet man auf der Unterstufe auch einer Unterstützung des mathematischen Unterrichts durch Kurvenzeichnen u. dgl. (Bestimmung durch Punkte oder Tangenten in einem Koordinatensystem), zu dem die Untersuchung von Funktionen Anlaß gibt.

In der Oberstufe wird dann erheblich über das Pensum der darstellenden Geometrie in den Pflichtstunden hinausgegangen, besonders in der Lehre von den Durchdringungen, der Zentralperspektive, den Schattenkonstruktionen, wozu bisweilen noch einiges aus der graphischen Statik tritt.[2])

Neuerdings hat man in Preußen dem „mathematischen" Linearzeichnen ein „künstlerisches" zur Seite gestellt. Hier sollen unter Verzicht auf die mathematische Entwicklung (der Unterricht muß vom Zeichenlehrer, also in fast allen Fällen einem Nichtmathematiker, erteilt werden) Architekturzeichnen, Maschinenzeichnen, Terrainaufnahmen, Konstruktionen aus der graphischen Statik Lehrgegenstand sein. Die Frage des Linearzeichnens ist aber, wenigstens in Preußen, noch so sehr im Fluß, daß von einer Klärung der Ansichten noch keine Rede sein kann.[3]) Lehrbücher sind für das Linearzeichnen kaum in Gebrauch; eine Vorstellung von dem, was praktisch etwa geleistet wird, zeigen neben den ausführlichen Lehrbüchern der darstellenden Geometrie (z. B. Müller-Presler) beispielsweise die Bücher von Eggers, welche Tafeln mit auszuführenden Zeichnungen — die man natürlich nicht mechanisch nachzeichnen lassen wird — enthalten.

---

1) F. Schilling, Über die Anwendungen der darstellenden Geometrie, insbesondere über die Photogrammetrie. Leipzig. (Teubner.) 1904.

2) Vergl. z. B. R. Sellentin, Methodischer Lehrgang der Linearperspektive für höhere Lehranstalten. Progr. Oberrealschule Elberfeld 1903 und ders., Methodischer Lehrgang des Linearzeichnens für höhere Lehranstalten. Unterstufe. Progr. Oberrealschule Elberfeld 1904.

3) Vergl. über diese Frage: E. Kullrich und K. Wägler, Das Linearzeichnen. Progr. Realgymn. mit Realsch. Gera. 1909.

Dritter Teil.

Arithmetik, Algebra, Analysis.

17. Das System der Schularithmetik.

Von dem großen, Arithmetik, Algebra und Analysis umfassenden Gebiete wird für die ersten Schuljahre ein Abschnitt als Rechenunterricht abgespalten. Es handelt sich hier um das Rechnen mit ganzen natürlichen Zahlen und mit Brüchen unter Bevorzugung der Dezimalbrüche. Die Rechenoperationen beschränken sich auf die vier rationalen, Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division. Aus der Zahlentheorie kommen die Gesetze über Teilbarkeit und das Dezimalsystem, zuweilen auch allgemeine Zahlensysteme hinzu. Das Rechnen läuft aus in die sogenannten bürgerlichen Rechnungsarten (z. B. Mischungs-, Prozent-, Zinsrechnung), an die sich in realistischen Schulen, besonders in solchen, die sich in ihrem Charakter den Handelsschulen nähern, kaufmännisches Rechnen – in sächsischen Oberrealschulen z. B. bis Untersekunda – anschließt.

Wir wollen hier auf den Rechenunterricht, bei dem vor allem die methodische Behandlungsweise eine andere ist als in dem späteren mathematischen Unterricht, nicht eingehen; die Erwähnung war aber notwendig, da von hier aus eine Überleitung in den eigentlichen mathematischen Unterricht stattfindet, insofern in den Endphasen des Rechenunterrichts, besonders in der Zinsrechnung, ganz allmählich die Buchstabenformel auftritt. Der Rechenunterricht ist die Propädeutik der Arithmetik. Die in den höheren Schulen am meisten benutzten Rechenbücher sind die von Harms und Kallius, Schellen, Heinrich Müller-Pietzker, Günther und Boehm und Böhme.

Das ganze Gebiet der Arithmetik, Algebra und Analysis wird im Schulbetrieb bisweilen abweichend vom wissenschaftlichen Sprachgebrauch mit Arithmetik bezeichnet. Doch ist der Gebrauch sehr schwankend: Schwering z. B. nennt sein Lehrbuch „Arithmetik und Algebra“, seine Aufgabensammlung: „Aufgaben aus der Arithmetik“, obwohl natürlich auch hier die Gleichungen zu Wort kommen. Immerhin hat sich die Unterscheidung von Arithmetik und Algebra im wissenschaftlichen Sinne jetzt fast allgemein verbreitet. Gleich dort, wo der Funktionsbegriff auftritt, von Analysis zu sprechen, ist nicht üblich, im Schulgebrauch führen nur einige Kapitel (z. B. unendliche Reihen, Infinitesimalrechnung) den Namen Analysis, oft mit dem Zusatz „des Unendlichen“. Allgemein läßt

sich sagen, daß die drei Gebiete im Schulbetriebe stets ineinandergreifen, nie getrennt vorkommen, daß jedoch die systematischen Lehrbücher das Bestreben zeigen, die Trennung hervorzukehren.

Während in der Geometrie das System noch heute fast in denselben Linien sich bewegt wie vor 2000 Jahren, ist der Charakter der Schularithmetik ein durchaus moderner. Die Arbeiten Graßmanns[1]), Schroeders[2]) und besonders Hankels[3]) sind maßgebend für die heutige Systemgestaltung gewesen.

Die moderne Grundlegung der Arithmetik mit den Mitteln der Mengenlehre dürfte bis jetzt noch nicht Eingang in die Schulen gefunden haben. Zwar besitzen wir in dem Lehrbuch von Fr. Meyer ein Schulbuch, das durchaus dem „Cantorisme" huldigt, wie Poincaré einmal die Cantorsche Mengenlehre genannt hat. Da finden wir auf der dritten Seite z. B. den Lehrsatz „Eine wohlgeordnete Menge ist abzählbar auf jede Menge, welche durch Platzvertauschung zweier Elemente aus ihr entsteht" bewiesen, auf der sechsten Seite bereits die transfiniten Zahlen usf.; leider ist aber dem Buche nicht zu entnehmen, in welcher Weise der Verf. es seinem Unterrichte zugrunde gelegt hat.

Mir ist auch in einem Lehrbuche noch kein Versuch bekannt, die Mengenlehre der Oberstufe zu erschließen – während doch in der Geometrie der Oberstufe Hinweise auf die Axiomatik nicht fehlen. Daß aber gelegentliche Ausblicke auf diese Dinge möglich, ja vielleicht wünschenswert sind, hat ein Vortrag von H. Wieleitner[4]) auf der Erlanger Versammlung (1906) des Vereins zur Förderung des Unterrichts in Mathematik und Naturwissenschaft gezeigt. Von Darstellungen der Mengenlehre, die für Lehrer bestimmt sind, nenne ich Weber-Wellstein[5]) im 1. Band und auf endliche Mengen sich beschränkend im Anhang des 3. Bandes, und Kleins Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus[6]) im Anhang.

1) H. Graßmann, Lehrbuch der Arithmetik für höhere Lehranstalten, Berlin. 1861. „Tritt mit dem Anspruche auf, die erste streng wissenschaftliche Bearbeitung jener Disziplin zu sein, und mit dem noch weiter gehenden Anspruche, daß die darin befolgte Methode, wie sehr sie auch von der üblichen abweichen mag, dennoch in allen ihren wesentlichen Momenten nicht eine unter vielen möglichen, sondern die einzig mögliche Methode einer streng folgerichtigen und naturgemäßen Behandlung jener Wissenschaft sei". (Vorrede.)

2) Neben dem im Literaturverzeichnis genannten Schulbuche ist das gleichfalls mit dem ersten Band abgeschlossene Buch: E. Schroeder, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra 1. Bd. Leipzig. 1873. zu nennen.

3) H. Hankel, Theorie der komplexen Zahlensysteme. Leipzig. 1867.

4) H. Wieleitner, Der Zahl- und Mengebegriff im Unterricht. Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaft. 12 (1906), 102.

5) Vergl. das Zitat in Abschnitt 5.

6) F. Klein, Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Teil 1: Arithmetik, Algebra und Analysis. Ausgearb. von E. Hellinger. Leipzig. (Teubner.) 1908.

Das Band, das sich durch das ganze System der Schularithmetik zieht, ist das von Hankel formulierte Permanenzprinzip; es kehrt immer wieder, bei jeder neuen Erweiterung des Zahlenbereiches und bei jeder Ausdehnung der Rechenoperationen auf die neuen Zahlen. Der Einblick in den gesetzmäßigen Aufbau des Zahlenbereiches wird ausdrücklich als eines der Ziele in den Lehrplänen angegeben. Wie man nach dem Permanenzprinzip verfährt, kann man etwa der Methodik der elementaren Arithmetik von M. Simon[1]) (für Schüler führt Pflieger diese Methode Simons durch) und dem Artikel von H. Schubert – der überhaupt sehr viel für das Eindringen dieser Lehren in die Schule getan hat – in der großen Enzyklopädie[2]) entnehmen, wobei zu bemerken ist, daß in beiden Fällen – absichtlich – über das auf der Schule Geleistete hinausgegangen wird. Dem Ausländer ist vielleicht noch die Angabe der Éléments d'Algèbre von O. Baer, eines für das französische Gymnasium in Berlin französisch geschriebenen Lehrbuches, erwünscht.

Das Schema der Rechenoperationen ist das folgende:

Rechenoperationen		
	1. Stufe:	1. Addition.
		2. Subtraktion.
	2. Stufe:	3. Multiplikation.
		4. Division.
	3. Stufe:	5. Potenzierung.
		6. Radizierung.
		7. Logarithmierung.

Die Gesetze für diese Rechenoperationen (z. B. über Ausführbarkeit, Eindeutigkeit, Monotonie, das assoziative und das kommutative Gesetz bei der Addition) werden meist nicht als Axiome aufgestellt, sondern wie in der Geometrie aus der Anschauung, so hier aus Zahlenbeispielen erschlossen. – Das Prinzip der Permanenz führt bei den inversen Rechenoperationen 2, 4, 6, 7 zu neuen Zahlen, so daß für die allmähliche Erweiterung des Zahlbereiches sich das folgende Schema ergibt:

<table>
<tr><td>Positive ganze
Null, Negative</td><td>} relative oder „algebraische"</td><td rowspan="2">} rationale</td><td rowspan="3">} reelle Zahlen.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Gebrochene . . . .</td></tr>
<tr><td colspan="3">Irrationale . . . .</td></tr>
<tr><td colspan="4">Komplexe Zahlen.</td></tr>
</table>

In dem Schema sei als Abweichung vom wissenschaftlichen Sprachgebrauch die noch immer recht verbreitete (vergl. Fenkner, Mehler u. a.) gemeinsame Bezeichnung der positiven und negativen Zahlen als algebraische Zahlen noch einmal ausdrücklich bemerkt. –

1) M. Simon, Methodik der elementaren Mathematik in Verbindung mit algebraischer Analysis. Leipzig. (Teubner.) 1906.

2) Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Bd. 1. Arithmetik und Algebra. 1898–1904. S. 1. Vergl. auch die wesentlich erweiterte Bearbeitung dieses Artikels durch Tannery und Molk in der Encyclopédie des Sciences Mathématiques. Éd. française. Tome 1. Volume 1. p. 1. (1904).

Auch einer Erweiterung des Schemas bei Heinrich Müller sei gleich hier gedacht; er führt in Anlehnung an den geschichtlichen Entwicklungsgang bei den gebrochenen Zahlen erst die Stammbrüche $1/n$, dann erst die allgemeinen gebrochenen Zahlen m/n ein.

Um an einem Beispiele einmal vollständig das Verfahren zu zeigen, wähle ich die negativen Zahlen. Man hat bei der Subtraktion gefunden, daß diese nur ausführbar ist, wenn der Minuend größer ist als der Subtrahend. Man führt jetzt neue Zahlzeichen ein derart, daß jede Subtraktion unter Hinzunahme der neuen Zahlzeichen ausführbar ist. Für diese neuen Zahlen, die Null und die negativen Zahlen, sind dann die Grundoperationen zu definieren. Das tut man so, daß die bisherigen Zahlgesetze sinngemäß erweitert werden. Wenn z. B. a^n für positives n definiert ist, wird $a^0 = 1$ und $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ festgesetzt, und zwar gerade so, weil dann z. B. das Potenzgesetz $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ auch für die negativen Exponenten gilt. (Helmes sagt (1874): „Unabhängig von den besonderen Werten der Exponenten m und n wollen wir ganz allgemein den Quotienten $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ setzen, eine Bestimmung, die für $m > n$ den Lehrsatz ... ausspricht, für jeden anderen Fall aber die Bedeutung des Differenzexponenten verallgemeinert".)

Die Methode wird nicht immer so zum Ausdruck gebracht, wie es hier geschieht, vielleicht um die Zahl der Definitionen zu vermindern. Ich mache eine andere, im wesentlichen auf demselben Prinzip beruhende Form der Erweiterung nach Schwering an der Hand des Gesetzes über die Multiplikation von Brüchen klar. Es ist

$$ax = b \text{ gleichbedeutend mit } x = \frac{b}{a}$$

$$cy = d \quad - \quad y = \frac{d}{c}$$

$$\text{folgl.} \quad a \cdot c \cdot x \cdot y = b \cdot d \quad - \quad x \cdot y = \frac{b \cdot d}{a \cdot c}.$$

$$\text{Folglich ist} \quad \frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c} = \frac{b \cdot d}{a \cdot c}.$$

Der äußere Aufbau des Systems bietet Anlaß zu einiger Mannigfaltigkeit der Disposition, weil Erweiterung des Zahlbereiches und Erweiterung der Rechenoperationen ineinander greifen. Eine extreme Stellung nehmen diejenigen ein, welche, wie z. B. Wittstein und Fenkner, erst alle 7 Rechenoperationen an positiven ganzen Zahlen definieren — in der Schule wird man natürlich nie soweit gehen — und dann zu den Erweiterungen des Zahlbereiches übergehen. Ähnlich macht es Schüller, nur daß er die Logarithmierung zunächst fortläßt und sie dann am Schluß der ganzen, für die Unterstufe (bzw. Lehrerseminare) berechneten Arithmetik bringt. Übrigens kommt es öfter vor, daß der Logarithmierung eine Sonderstellung eingeräumt wird, auch wenn man sie als Umkehrung der Potenzierung definiert, z. B. bei Spieker.

Die in Frankreich übliche (auch geschichtlich erste) Definition auf Grund von Vergleichungen arithmetischer und geometrischer Reihen[1]), das sei bei dieser Gelegenheit bemerkt, ist mir in einem deutschen Lehrbuche nirgends begegnet, doch wird in der Bardeyschen Aufgabensammlung (Neue Bearbeitung) in einem Kapitel „Verbindung von arithmetischen und geometrischen Reihen" die Frage wenigstens gestreift. Es wird dort z. B. die Frage aufgeworfen: Welche Reihe bilden die Logarithmen solcher Zahlen, die sich selbst in geometrischer Reihe folgen?

Die von Tannery[2]) und neuerdings bei uns von Klein[3]) angeregte Definition, welche die Hyperbelintegration benutzt, kommt für die erste Einführung der Logarithmen wohl kaum in Frage, doch ist ein Hinweis auf der Oberstufe angebracht, wie das Holzmüller[4]) auch in etwas veränderter Fragestellung getan hat.

Eine andere Gruppierung des arithmetischen Systems (Schwering[5])†) ist die, daß man erst die direkten Operationen einführt, dann schrittweis die Umkehrungen mit den zugehörigen Erweiterungen des Zahlkreises.

Der häufigste Fall ist eine Zweiteilung des Pensums in a) die vier ersten Rechenoperationen mit den negativen und gebrochenen Zahlen, b) die Rechenoperationen dritter Stufe mit den Irrationalzahlen und den komplexen Zahlen (z. B. Wrobel). Einen methodischen Einschlag bedeutet es, wenn zwischen beide Abschnitte als Vorbereitung des zweiten ein Kapitel „Quadratisches" eingeschaltet wird, wie das z. B. von Schubert geschieht.

Die Exaktheit in der Darstellung des Systemaufbaues läßt in den Einzelfällen noch zuweilen zu wünschen übrig. Daß zwischen Definition und Lehrsatz richtig unterschieden wird, ist nicht immer der Fall, oft hat man für beides auch den farblosen Ausdruck Rechenregel. Versuchen, $(-a) \cdot (-b)$ zu beweisen („folgt" aus

$$(m-a) \cdot (n-b) = mn - mb - an + ab$$

für $m = n = 0$) oder $a^0 = 1$ („folgt" aus

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

1) Vgl. E. Borel-P. Stäckel, Die Elemente der Mathematik. Bd. 1: Arithmetik und Algebra. Leipzig. (Teubner.) 1908.

2) J. Tannery, Notions de Mathématique. 2. Ed. Paris. (Delagrave.) Von dem Buche ist auch eine deutsche Bearbeitung erschienen: J. Tannery, Elemente der Mathematik. Deutsche Ausg. von P. Klaeß. Leipzig. (Teubner.) 1909.

3) F. Klein, Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Teil I. Vergl. Zitat in Abschnitt 5.

4) Vergl. den Abschnitt „die Funktion $y = \frac{1}{x}$ und die Quadratur der Hyperbel durch den natürlichen Logarithmus" in Holzmüllers Lehrbuch. Teil III (nur in der 1. Aufl. von 1895!) S. 134 ff., auch desselben Aufsatz in der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 27 (1896) S. 241.

5) Vgl. auch K. Schwering, Handbuch der Elementarmathematik für Lehrer. Leipzig. (Teubner.) 1907.

für $m = n$) kann man noch immer gelegentlich begegnen. Erklärlich wird das, wenn man berücksichtigt, daß die meisten Arithmetikbücher nur Aufgabensammlungen sein wollen und daß im Unterricht zumal der Unterstufe oft mehr Gewicht auf das Lösen der Aufgaben als auf den Aufbau des Systems gelegt wird. Man begegnet aber leider denselben Fehlern auch manchmal noch in den im Anschluß an die Aufgabensammlungen erschienenen Lehrbüchern und in Leitfäden überhaupt. (In der Arithmetik ist recht häufig die Aufgabensammlung das primäre, an die sich dann Lehrbücher anschließen; besonders gut kann man das bei der Heisschen Sammlung verfolgen, auf die z. B. Boymann, R. W. Neumann, Wimmenauer zurückgehen.) Man hat auch den nach den Meraner Vorschlägen bearbeiteten Lehrbüchern (Behrendsen-Götting, Schwab-Lesser) den Vorwurf gemacht, daß sie z. B. bei der Potenzierung nicht mit der nötigen Strenge verführen.[1]) Hier spielt offenbar der gleiche Gegensatz, dem wir schon bei der Geometrie begegneten, hinein: Auf der einen Seite eine Bevorzugung rein anschaulicher Methoden, auf der andern die Forderung eines vollständigen, deduktiven Systems.

18. Methodische Bemerkungen zum arithmetischen Unterricht.

Den vorstehenden Ausführungen seien noch einige methodische Bemerkungen angefügt. Methodische Lehrbücher, die wenigstens andeutungsweise den wirklichen Unterricht wiedergeben, benutzen bei der Ableitung der Sätze in ausgedehntem Maße das Zahlenbeispiel. Daß z. B.

$$(2x + 3) \cdot (5x + 4) = 10x^2 + 23x + 12$$

ist, wird bei Schwering für $x = 0, 1, \ldots 4, \frac{2}{3}$ durchprobiert.

Nicht nur, daß bei der heuristischen Ableitung der Rechengesetze überall Beispiele mit natürlichen Zahlen die Leitlinien geben (vergl. etwa Schüller), auch Zahlenproben bei bewiesenen Sätzen sind immer und immer wieder am Platze (Schwering). „Was für die Geometrie die Anschauung, ist für die Arithmetik die Rechnung." Ja, Haacke stellt geradezu den Satz auf: „Die Kraft der Beweise verliert an Strenge nichts, wenn man sie statt an den allgemeinen an bestimmten Zahlen führt." Und Stäckel sagt in der Vorrede zu seiner Borel-Bearbeitung: „Ebenso wie man in der Geometrie einen allgemeinen Satz an

1) Das gleiche gilt von den französischen Schulbüchern, die einen Einfluß auch auf die Reformbewegung in Deutschland erlangt haben, vor allem von E. Borel, Algèbre 1. Cycle 1903, 2. Cycle 3. Éd. 1905 Paris. (Colin.); vergl. auch die bereits zitierte deutsche Bearbeitung von P. Stäckel. Übrigens meidet Borel die negativen Exponenten, bei ihm tritt das Gesagte besonders bei der Multiplikation zutage. Erheblich besser steht es mit der Strenge in dem vielbenutzten Buche von C. Bourlet, Précis d'Algèbre. Paris. (Hachette.) 1904. Will man ein ganz radikales Gegenbeispiel haben, so wende man sich an die Italiener, etwa an das Lehrbuch des kürzlich verstorbenen A. Faifofer, Elementi di Algebra. 17. Ed. Venezia. (Sorteni e Vidotti.) 1908.

einer besonderen Figur oder mehreren besonderen Figuren beweisen kann, so kann man auch in der Arithmetik einen allgemeinen Satz an einem besonderen Zahlenbeispiel oder mehreren gut gewählten Zahlenbeispielen beweisen, vorausgesetzt, daß man sich hier wie dort klar macht, daß die Beweisgründe, die in dem besonderen Fall ausreichen, allgemeine Gültigkeit besitzen."

Von vielen Autoren werden die negativen nicht vor, sondern hinter die gebrochenen Zahlen eingeschaltet. Man begründet das psychologisch-pädagogisch, indem man auf die Schwierigkeiten dieser Begriffsbildung hinweist, und kann dann auch die geschichtliche Entwicklung für sich sprechen lassen. Als Vertreter dieser Ansicht nenne ich Schwering, Spieker, Pietzker, Schülke und mit Berufung auf Dühring[1]) auch Haacke.

Im Anschluß an die gebrochenen Zahlen werden in den meisten Fällen die Proportionen in einem besonderen Kapitel behandelt.

Der Begriff der Irrationalzahl entzieht sich in seiner exakten Formulierung natürlich der Schule, z. B. ist Simons Darstellung der Reihenzahlen (in der Methodik der Arithmetik) nicht in das Schulbuch von Pflieger übergegangen. Man findet in der Wurzelrechnung, daß beispielsweise $\sqrt{2}$ sich nicht im Bereiche der rationalen Zahlen darstellen läßt. Man erweitert also das Gebiet, wobei man aber nicht exakt die Frage erledigt, um welche Zahlen man das Gebiet der rationalen Zahlen erweitert. Daß man auf diese Weise nur algebraische Zahlkörper, noch dazu nur zyklische oder aus solchen zusammengesetzte algebraische Zahlkörper trifft, kommt wohl gelegentlich einmal zur Sprache, wenn es sich um die Transzendenz von π handelt, ein Schulbuch, welches das tut, ist mir aber nicht bekannt. (Übrigens bringen Niemöller und Decker den Cantorschen Nachweis der Existenz transzendenter Zahlen.)

Die ganze Frage kann jedenfalls nicht vollständig erledigt werden. Wenn Netto[2]) noch dem Studierenden des ersten Semesters das Recht zugesteht, „an irrationale Zahlen zu glauben, das komplexe Gebiet als ein unentbehrliches Hilfsmittel dankbar und kritiklos hinzunehmen, jeden Grenzprozeß unbefangen mitzumachen und zum Unendlichen Stellung zu nehmen wie zum kleinen Einmaleins", so gilt das um so mehr vom Schüler.

Ein methodisch überaus fruchtbares Prinzip ist das der geometrischen Veranschaulichung arithmetischer Gesetze. Insbesondere sind hier anzuführen:

1. Die Darstellung der reellen Zahlen unter dem Bilde einer Geraden mit Nullpunkt. Als Muster nenne ich Behrendsen-Götting; zwar

1) Vgl. E. Dühring und U. Dühring, Neue Grundmittel und Erfindungen zur Analysis, Algebra, Funktionsrechnung und zugehörigen Geometrie. Leipzig. (R. Reisland.) 1884; ein zweiter Teil erschien ebenda 1903. Die pädagogischen Ratschläge der Verfasser sind sonst wohl ohne Einfluß auf den Unterricht geblieben.

2) E. Netto, Elementare Algebra. Leipzig. (Teubner.) 1904.

erwähnt die Mehrzahl der Bücher die Zahlengrade, nutzt sie aber nicht so ausgiebig zur Versinnbildlichung der arithmetischen Operationen aus, wie das gerade Behrendsen und Götting tun.

2. Die Darstellung der komplexen Zahlen in der sogenannten Gaußschen Ebene.

3. Darüber hinaus werden auch Multiplikationsregeln, z. B. die Formeln für $(a+b)^2$, $(a-b)^2$ und $(a+b)\cdot(a-b)$, sehr häufig, seltener der Algorithmus des Quadratwurzelziehens (Simon, Didaktik) unter dem Bilde von Flächen geometrisch versinnbildlicht. – Hier greift dann die Frage der graphischen Darstellung ein, die an späterer Stelle zur eingehenden Besprechung kommen soll.

Großen Wert legt der Unterricht auf die praktische Ausführung von Umformungen arithmetischer Ausdrücke. Die Klammerrechnung (man vergl. z. B. für solche Aufgaben Hofmanns Aufgabensammlung), das Heben und Erweitern der Brüche und der Exponenten nimmt einen sehr großen Teil der Aufgabensammlungen in Anspruch; man hat diesen „Reduktionen“ (Bussler u. a.) eine Zeitlang wohl zu viel Wert beigemessen, sie sind oft zu „Knifftologien“ ausgeartet; jedenfalls mehren sich die Stimmen gegen unvernünftige Klammerhäufungen u. dgl.; neuere Bücher schränken sie sehr ein.

Es bleiben noch einige Worte zu sagen über die Rolle der Arithmetik auf der Oberstufe. Das Rechnen mit komplexen Zahlen wird weiter ausgeführt und geht dann in algebraisch-analytische Problemstellungen ein.

Eine gegen das übrige Pensum ziemlich abgesonderte Stellung nimmt die Kombinatorik oder Syntaktik ein. Sie beschränkt sich in der Regel auf die Begriffe der Permutation, Kombination und Variation. In der Hauptsache ein Ausfluß des Regimes des formalen Zweckes der Mathematik, sucht sie sich, da die direkten Aufgaben (z. B. „Wie heißt die 38223te Variation zur 4. Klasse mit Wiederholung von den 25 Buchstaben des Alphabets“) kaum in Betracht kommen, durch den Hinweis auf ihr vornehmlichstes Anwendungsgebiet, die Wahrscheinlichkeitsrechnung, zu halten. Eine ausführliche, doch immer noch schulgemäße Darstellung dieses Gebietes findet man beispielsweise im ersten Bande von H. Schuberts Niederer Analysis.[1])

Im Anschluß an die Kombinatorik wird auch der binomische Lehrsatz (Ausdruck für $(a+b)^n$) für ganze Exponenten entwickelt, ein Satz, der in gleich unberechtigter Weise wie das Apollonische Berührungsproblem in der Planimetrie der Realanstalten vielfach noch als Gipfelpunkt der Mathematik am Gymnasium angesehen wird.

Von zahlentheoretischen Fragen kamen früher zwei zu ausgedehnterer Behandlung: die diophantischen Gleichungen und die Kettenbrüche.

1) H. Schubert, Niedere Analysis. 1. Teil: Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Kettenbrüche und diophantische Gleichungen. 2. A. Leipzig. (G. J. Göschen.) 1908.

Heute dürften diese Gebiete aus dem obligatorischen Schulbetrieb fast ganz verschwunden sein, immerhin werden viele Schüler sie noch aus privater Arbeit kennen lernen. Die Lehrbücher haben nämlich diese Gebiete zum größten Teil noch beibehalten, ich nenne z. B. für die Kettenbrüche: Boymann, Focke-Krass, Kambly-Langguth, Lieber und von Lühmann, Reidt, Spieker, Wrobel, für die diophantischen Gleichungen dieselben Bücher und Bork-Nath, Heinrich Müller. Ausführlich ist die Darstellung in der oben zitierten Niederen Analysis von Schubert. Auf gewisse diophantische Gleichungen (z. B. auf $x^2 + y^2 = z^2$) wird wohl noch heute in jedem Unterricht eingegangen. (Dagegen werden die allgemeinen diophantischen Gleichungen zweiten Grades sehr selten und dann meist im Anhang erledigt; vgl. z. B. Bardey-Hartenstein). Die Zahlenkongruenzen werden bei Boymann kurz, etwas ausführlicher bei A. Hochheim und Niemöller-Dekker (hier z. B. auch die φ-Funktion) besprochen. Tellkampf geht bis zum Fermatschen Satz, Baltzer bis zu den quadratischen Resten.

Schließlich sei hier auch noch jenes Gebiet der Mathematik genannt, das eine so eigentümliche Stellung zwischen Geometrie, Arithmetik und Analysis einnimmt, die Kreisteilung. Für Schulen kommt hier die Konstruktion des Siebzehneckes in Frage, die, da eine rein geometrische Ableitung noch nicht bekannt, hier erwähnt werden muß. Ich habe diese Konstruktion in den Schulbüchern bei Holzmüller (im 3. Teil der Elementar-Mathematik) gefunden, wo die Lösung an die bei Schlömilch (Geometrie des Maßes) gegebene sich anschließt.

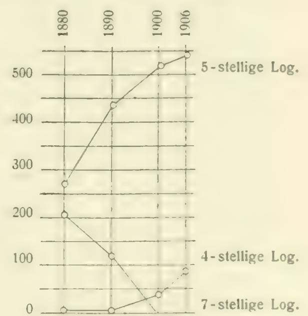
19. Numerisches Rechnen.

Wenn wir von dem Rechnen bis Quarta und dem kaufmännischen Rechnen in höheren Schulen absehen, so kommt hier zunächst der Algorithmus des Wurzelausziehens in Betracht. Das Quadratwurzelausziehen wird gewöhnlich bei Gelegenheit der Potenzrechnung in die Arithmetik eingeschoben. Das Kubikwurzelziehen wird im Unterricht nur noch selten geübt, doch gehen fast alle Bücher darauf ein. Die in den Schulen gebrauchten Tabellenwerke enthalten gewöhnlich auch eine Quadratwurzeltafel.

Für die praktischen Anwendungen ist von größter Wichtigkeit das abgekürzte Rechnen. Die Zahl der Rechenbücher, die dies Verfahren etwa in Quarta bringen, nimmt immer mehr zu. Zuweilen bringen auch die arithmetischen Lehrbücher eine Darstellung dieser Methode (z. B. Bardey, Boymann, Helmes, Wrobel, Haller von Hallerstein). Das Verfahren wird wie bei der Multiplikation und Division auch beim Quadratwurzelausziehen angewandt. Derjenige, der neuerdings auf das abgekürzte Rechnen mit größtem Nachdruck hingewiesen hat, ist Schülke. Es hängt das mit der ganzen Tendenz des Wirkens von Schülke zusammen, der der mathematischen Aufgabe die wirkliche Praxis erschließen will; es wird darauf später zurückzukommen sein.

Die graphischen Rechenmethoden, wie sie die Nomographie ausgebildet hat, sollen hier wenigstens Erwähnung finden. In die Lehrbücher haben diese Methoden meines Wissens bisher noch nirgends Eingang gefunden, ebensowenig wie etwa die Rechenmaschinen. Im Unterricht wird aber vielleicht auf einzelne einfache Fälle (Multiplikationsblätter u. dgl.) hingewiesen (vgl. eine Programmarbeit von Fürle[1]). Ebenso dürften die jüngst von Bennecke[2]) veröffentlichten graphischen Tafeln einer Art komplexer Logarithmen gelegentlich Erwähnung finden.

Über die Verwendung der verschiedenstelligen Logarithmen gibt das nebenstehende Schema ein Bild, das auf Grund der schon im ersten Teile benutzten Lehrbuchverzeichnisse im Zentralblatt (für 1880 und 1890) und bei Horn angefertigt ist und die Zahl der Anstalten in Preußen angibt, an denen 7-, 5-, und 4-stellige Logarithmen eingeführt sind.



Schema 3. Übersicht über die Zahl der Lehranstalten, an denen die verschiedenstelligen Logarithmen eingeführt sind.

1880 waren 5- und 7-stellige Logarithmen annähernd gleichmäßig vertreten. Die 7-stelligen Logarithmentafeln sind inzwischen – schließlich durch behördliche Verfügung – ganz verschwunden; die weitaus gebräuchlichsten 7-stelligen Tafeln waren die von v. Vega. Genauigkeitsfanatiker mögen auch heute noch existieren, jedenfalls spuken noch immer in manchen Büchern an versteckten Stellen die 7-stelligen Logarithmen; so in Spiekers Arithmetik (in Klammern sind allerdings die Resultate für fünfstellige Logarithmen angegeben) und in seiner Trigonometrie bei Aufgaben, „welche eine weitergehende Genauigkeit erfordern". In Koppe-Diekmanns Geometrie ist eine Bretschneider entlehnte Tafel von pythagoräischen Dreiecken gegeben, die siebenstellige Logarithmen voraussetzt und so zehntel Sekunden in den Winkeln gibt. Boymann rechnet (1907!) noch mit 7-stelligen Logarithmen, dabei treten gelegentlich hundertstel Sekunden auf! Bei den Gaußschen Additionslogarithmen – nur sehr wenige Autoren gehen darauf ein oder lassen sie doch in neueren Ausgaben fallen – gebraucht Boymann allerdings, weil er den Wittsteinschen Tafeln folgt, 5-stellige Logarithmen. Die Gründe für das Beibehalten der 7-stelligen Logarithmen muten oft recht sonderbar an, so meint Helmes: „Man möge dem Schüler in dem Asthma des Kalküls das Blättern in der Tafel wohl mal als Interstitien fürs Atemholen gönnen".

1) H. Fürle, Rechenblätter. Progr. der 9. Realschule zu Berlin 1902.
2) F. Bennecke, Eine konforme Abbildung als zweidimensionale Logarithmentafel zur Rechnung mit komplexen Zahlen. Berlin. (Salle.) 1907.

Die 5-stelligen Tafeln haben heute das unbedingte Übergewicht. Die gebräuchlichsten sind: Schlömilch, August, Greve, Wittstein, F. G. Gauß in einer großen und einer kleinen Ausgabe und Bremiker; recht handlich sind die Tafeln von Adler. Einen Vermittlungsvorschlag zwischen 7- und 5-stelligen Logarithmen hat Bremiker seinerzeit mit der Herausgabe einer 6-stelligen Tafel gemacht, er hat damit aber in der Schule keinen Anklang gefunden, während die Tafeln von Astronomen und Physikern, wie die hohe Auflagenzahl zeigt, viel gebraucht werden.

Wieder ein Verdienst Schülkes, daneben von A. Richter, Treutlein, Thaer u. a., ist es, daß eine lebhafte Bewegung im Gange ist, die vierstelligen Tafeln an die Stelle der fünfstelligen treten zu lassen, weil vierstelliges Rechnen für die Praxis meist völlig ausreichend ist. Schülke hat einen praktischen Vorgänger in I. H. T. Müller gehabt, dessen vierstellige Logarithmentafel schon im Jahre 1880, für das zuerst unsere Tabelle Auskunft gibt, als weißer Rabe unter sieben- und fünfstelligen angegeben ist; sie war übrigens (die zweite Auflage stammt von 1861) schon früher mehrfach (so in Wiesbaden und auf Veranlassung von Baltzer an der Kreuzschule in Dresden) in Gebrauch. Auch Schlegel hat übrigens eine vierstellige Tafel herausgegeben; von 1892 ist eine von E. R. Müller. Heute ist die gebräuchlichste die Tafel von Schülke, daneben sind für Preußen etwa noch F. G. Gauß, C. Rohrbach, H. Schubert, P. Treutlein zu nennen. Die graphische Darstellung zeigt, daß die Zunahme der Anstalten mit vierstelligen Logarithmen stärker ist, als die der Anstalten mit fünfstelligen. In der Praxis werden übrigens wohl auch mehrfach vierstellige Logarithmen an Anstalten angewandt, wo fünfstellige Tafeln eingeführt sind. Einige mathematische (z. B. Schulte-Tigges-Mehler und Koppe-Diekmann), gelegentlich auch physikalische Lehrbücher geben am Schlusse ausreichende Tafeln vierstelliger Logarithmen. Immerhin ist auch diese Bewegung wieder ein Beispiel, wie langsam sich Neuerungen an Schulen durchzusetzen vermögen. Noch immer überwiegen die fünfstelligen Logarithmen ganz gewaltig.

In neuer Zeit begnügt man sich in speziellen Fällen, z. B. bei Berechnungen in den physikalischen Übungen, auch mit dreistelligen Logarithmen. Tafeln sind dabei wohl selten üblich (O. Richter hat eine solche hergestellt[1])), meist verwendet man die dreistelligen Logarithmen in der handlichen Form des Rechenschiebers. Auf den Rechenschieber ist schon vor langer Zeit von von der Heyden[2]) hingewiesen, immerhin ist er früher kaum benutzt worden. Daß heute die Sachlage sich geändert hat, liegt allgemein in der praktischen Tendenz des modernen

1) Vgl. auch O. Richter, Dreistellige Logarithmen. Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. **39** (1908), 373. Wittstein hat schon 1877 eine solche Tafel in Visitenkartenformat seiner Logarithmentafel beigegeben.

2) Von der Heiden, Das Rechenlineal. Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. 3 (1872), wieder abgedruckt in **27** (1896), 568.

Unterrichts; verdienstlich waren insbesondere die Hinweise von C. H. Müller[1]). Für die Schule geeignete Modelle erleichtern die Verwendung immer mehr; in den Lehrbüchern wird allerdings nur erst vereinzelt auf den Rechenschieber hingewiesen, so bei Bork-Crantz-Haentzschel, Kambly-Langguth, in der Schülkeschen und in der Adlerschen Logarithmentafel.

In den trigonometrischen Tafeln wird der Einteilung der Winkelminuten in Sekunden neuerdings immer mehr die Dezimalteilung vorgezogen. Schülke geht im Anschluß an Bremiker noch einen Schritt weiter und ersetzt auch die Minuten durch die Dezimalteilung des Grades; bei dem vierstelligen Rechnen berücksichtigt man dann höchstens hundertstel Grad.

Ich versage es mir hier, noch einige Angaben über die Ausstattung und Einrichtung der Logarithmentafeln zu machen, nur das sei gesagt, daß die guten Tafeln neben den dekadischen Logarithmen der natürlichen Zahlen, den Zahlenwerten der trigonometrischen Funktionen und deren Logarithmen regelmäßig noch astronomische, physikalische (einige besonders meteorologische), chemische und natürlich auch mathematische Konstanten-Tafeln enthalten, häufig auch kurze Ausführungen über die verschiedenen Methoden des logarithmischen und des trigonometrischen Rechnens und ihrer Anwendungen. Um die Genauigkeit von 5 bzw. 4 Stellen auch für Zinzeszinsrechnen zu gewährleisten, sind für die Zinsfaktoren stets Tafeln der Logarithmen mit größerer Stellenzahl (bei 5-stelligen Logarithmen meist 7, bei 4-stelligen meist 5 Stellen) vorhanden.

Die Logarithmentafel wird schon von Schülern benutzt, welchen die Kenntnis der Berechnungsweise der einzelnen Werte vollständig abgeht. Man hat es nun als eine unbedingte Forderung ausgesprochen, daß der Schüler auch auf dieser Stufe eine Einsicht wenigstens in die Berechnungsmöglichkeit – gleichgültig ob die betreffende Methode praktisch befolgt wird – der Logarithmen besitzt. Es gibt eine Fülle, besonders auch in Schulprogrammen niedergelegter Methoden, welche Wege zur elementaren Berechnung der Logarithmen angeben[2]). Von Lehrbüchern, welche eine elementare Berechnungsweise erwähnen, nenne

---

1) C. H. Müller, In Sachen des Rechenstabes. Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. **28** (1897), 180 und –, Der logarithmische Rechenstab und die Schule. Ebenda. **38** (1907), 526.

2) Ich nenne als Beispiele nur einige wenige Arbeiten: H. Schubert, Elementare Berechnung der Logarithmen, 1903, Leipzig. (Göschen.), und ein Abschnitt in desselben Verfassers „Auslese aus meiner Unterrichts- und Vorlesungspraxis". 3 Bände. 1905/06. Ebenda. A. Schmidt, Beiträge zum mathematischen Unterricht I. Die Berechnung der Logarithmen in Untersekunda. Progr. Prinz Heinrichs-Gymnasium Schöneberg. 1905. G. Mohrmann, Eine neue Art der Einführung der Untersekundaner in die Logarithmen-Lehre. Progr. Oberrealschule Barmen. 1902. Einen mehr historischen Charakter hat die auch auf die Berechnung der Sinusfunktion eingehende Abhandlung: M. Koppe, Die Behandlung der Logarithmen und der Sinus im Unterricht. Progr. Andreas-Realgymnasium Berlin. 1893.

ich aus älterer Zeit Wittstein, Baltzer und Helmes, dann die Aufgabensammlung von Bardey, von neueren Heinrich Müller, Pietzker, Holzmüller.

20. Algebraische Gleichungen.

In den systematischen Lehrbüchern ein besonderer Abschnitt, in dem Unterricht – und damit auch in den methodischen Lehrbüchern – in den systematischen Aufbau der Arithmetik eingeschmolzen, bilden die Gleichungen einen wichtigen, auf der Unterstufe vielleicht den wichtigsten Konzentrationskern des algebraisch-arithmetischen Unterrichts. Von den algebraischen Gleichungen mit einer Unbekannten werden, wenn wir zunächst nur von rein algebraischen Lösungsmethoden sprechen, auf der Unterstufe diejenigen vom ersten und zweiten Grade behandelt, auf der Oberstufe diejenigen vom dritten, zuweilen auch (in den Lehrbüchern fast regelmäßig) vom vierten Grade.

Die Lösung der Gleichung zweiten Grades ist die übliche mit der sogenannten quadratischen Ergänzung, d. h. also die Zurückführung auf eine rein quadratische Gleichung. Daneben findet sich zuweilen auch eine trigonometrische Lösung (siehe Pietzker). Auf die Gleichung zweiten Grades werden andere Gruppen zurückgeführt, die Gleichungen der Form

$$x^{2n} + ax^n + b = 0,$$

kubische Gleichungen mit einer leicht erkennbaren Wurzel, reziproke Gleichungen usw.

Die Lösung der Gleichung dritten Grades geschieht je nach dem Vorzeichen der Determinante nach der sogenannten Cardanischen Formel oder, unter Benutzung des Moivreschen Theorems

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\cdot\sin n\varphi,$$

in der trigonometrischen Form des Casus irreducibilis. In einzelnen Fällen (vergl. Schwab-Lesser) begnügt man sich zunächst mit der Methode von Viëta und Girard, welche die Beziehung

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

benutzt und ohne Verwendung der komplexen Größen zum Ziel führt.

Die Lösung der biquadratischen Gleichung erfolgt nach der Cartesischen, Eulerschen (siehe Pietzker) oder der Ferrari-Simpsonschen, auch nach Ferrari und Diekmann benannten Methode (Bardey-Hartenstein, Bardey, Heilermann-Diekmann), ohne daß natürlich die Frage der Lösbarkeit algebraischer Gleichungen durch Radikale allgemein in Angriff genommen wird. Alle diese Lösungen haben etwas Gekünsteltes an sich; dem abzuhelfen, hat Keferstein[1]) eine gemein-

1) H. Keferstein, Eine gemeinsame Methode zur Lösung der Gleichungen 2., 3. und 4. Grades. Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. 37 (1906), 169.

same Methode der Lösungen von Gleichungen zweiten bis vierten Grades gegeben; ob sie sich einbürgern wird, erscheint fraglich; die allgemeine Tendenz geht wohl dahin, die Gleichungen vierten Grades ganz zu unterdrücken, diejenigen dritten Grades stark einzuschränken. – Von Gleichungen höheren Grades kommen die binomischen Gleichungen der Form

$$x^n - a = 0$$

im Zusammenhang mit der Kreisteilungsaufgabe zur Behandlung, wieder mit Benutzung des Moivreschen Satzes.

Gleichungen ersten Grades mit zwei oder mehreren Unbekannten spielen auf der Unterstufe eine Rolle. Eine Verallgemeinerung auf ein System von Gleichungen ersten Grades mit n Unbekannten ist zuweilen in der Schule durchgeführt. Hier greift die Bewegung ein, die Determinanten der Schule zu erschließen. Reidt, dann Diekmann haben das versucht; Reidt (1874) in einem mehr methodisch, Diekmann (1881) in einem mehr systematisch gehaltenen Buche. Eine ausführliche Darstellung der Determinantenlehre bringt auch Gallenkamp. Infolgedessen haben auch einige andere Lehrbücher die Determinanten aufgenommen (z. B. Heis, Hochheim). Heute befindet sich die Bewegung aber schon wieder auf der absteigenden Linie. Von neueren Lehrbüchern bringt, wenn ich von der Übersetzung des Mansionschen Büchleins absehe, soweit ich sehe, nur noch Pietzker die Determinanten $n$ten Grades. Selbst Heilermann-Diekmann hat sie in der neuesten Auflage fallen lassen, und Reidt geht in seiner Aufgabensammlung, ähnlich wie Spieker und Kambly-Langguth, nur noch bis zu den Determinanten des dritten Grades. Allerdings bringt auch das Lehrbuch von Schwab-Lesser neuerdings Determinanten zweiten und dritten Grades.

Im Anschluß an die quadratischen Gleichungen, in der Regel vor den Gleichungen dritten und vierten Grades, werden die Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten behandelt. Da die Auflösung im allgemeinen Falle auf Gleichungen vierten Grades führt, welche ja auf den Schulen meist nicht behandelt werden, so eröffnet sich hier das weite Gebiet der bei den Älteren sehr beliebten „schwierigeren" Gleichungen, wobei denn immer das wichtigste Ziel das ist, bei der Lösung mit Gleichungen zweiten Grades auszukommen. Die Sammlungen enthalten hier sämtlich reiches Material. Ein ausführliches, für Lehrer bestimmtes Buch über die Gleichungen zweiten Grades (mit einer, zwei und auch mehr Unbekannten) hat Bardey verfaßt[1]).

Aus der allgemeinen Theorie der algebraischen Gleichungen wird auf der Oberstufe der Fundamentalsatz der Algebra erwähnt, doch fast durchgängig ohne Angabe des Beweises. Ich habe, obwohl der von

1) E. Bardey, Algebraische Gleichungen nebst den Resultaten und den Methoden zu ihrer Auflösung. 6. A. von F. Pietzker. Leipzig. (Teubner.) 1908. Dazu ders., Zur Formation quadratischer Gleichungen. 2. A., ebenda 1894.

H. Weber in der Enzyklopädie[1]) vereinfachte 1. Beweis von Gauß sehr wohl der Schule zugänglich ist, nirgends einen Beweis gefunden, abgesehen von Wittstein, der übrigens nicht in voller Strenge verfährt. Des weiteren werden im Unterricht, nachdem aus dem Fundamentalsatz die Zahl der Wurzeln festgestellt ist, die Beziehungen zwischen Koeffizienten und Wurzeln (mit der Anwendung auf das Erraten rationaler Wurzeln) festgestellt und die imaginären Wurzeln erörtert.

Bei der numerischen Berechnung von Wurzeln stehen die Regula falsi und die Newtonsche Näherungsmethode (siehe Abschnitt 24) im Vordergrund; wenn Kettenbrüche bekannt sind, tritt wohl auch die Lagrangesche Methode hinzu. Auf allgemeinere Sätze, wie z. B. die Cartesische Zeichenregel (bei Spieker), wird sehr selten eingegangen; daß der Unterricht bis zum Sturmschen Satz, wie Simon (Didaktik) meint, zuweilen vorgeht, ist mir für Norddeutschland nicht bekannt, die Lehrbücher bringen ihn meines Wissens nicht.

21. Die algebraische Aufgabe.

Wir wollen in diesem Kapitel ein Bild von dem Aufgabenmaterial in der Algebra geben, von den Sachgebieten, denen die „eingekleideten“ Gleichungen u. dgl. entlehnt sind. Wir tun das in der Form, daß wir die alte Aufgabe der modernen Aufgabe gegenüberstellen. Zur Kennzeichnung des alten Zustandes halte ich mich absichtlich an die frühere Gestalt eines zu seiner Zeit „mustergültigen, nach seinem Inhalte unübertroffenen“ Buches, das im laufenden Jahre von Grund aus neubearbeitet ist, die ehedem außerordentlich viel benutzte Heissche Sammlung; übrigens zeigt die Bearbeitung für die Nichtvollanstalten von Matthiessen (letzte Auflage 1905) noch heute den alten Zustand. Wir treten, wenn wir die Kapitel der eingekleideten Aufgaben durchblättern, in eine ganz eigene Welt. Da herrscht noch durchaus die gute alte Zeit, da wird noch in einzelnen Aufgaben nach Dukaten und nach preußischen Quart gerechnet, da erfreuen sich noch Hausfrauen der Mägde, die ihnen Garn und Flachs spinnen, da fährt noch die Postkutsche, und nur selten wagt sich einmal ein Fahrrad, oder gar ein Automobil oder „Kaiser Wilhelm der Große“ dazwischen. Die Leute, mit denen wir umgehen, sind der kleine Kaufmann mit seinen zwei Tabakssorten, seinen drei Weinsorten, die Hökerfrau, die mit Vorliebe Eier verkauft; dann die prächtigsten Märchengestalten: der Vater, der seinen Söhnen eine Kiste mit Dukaten hinterläßt, oder der Mann, der zwei Bretter mit Ein- und Zweimarkstücken belegt. Überhaupt sind die Menschen Ideale, die Arbeiter entwickeln fast regelmäßig gleichen Fleiß, höchstens steht einmal bei zwei Maurern der „beiderseitige Fleiß in dem Verhältnis 4:5.“

1) Enzyklopädie der Elementar-Mathematik. Bd. 1. 2. A. Leipzig. (Teubner.) 1906. S. 239.

Wesentlich ist, daß die Aufgabe aufgeht; sie gleicht darin dem Rätsel. Die Zahlenwerte werden eben so zugestutzt, gleichgültig, ob derartiges auch in der Wirklichkeit vorkommt, oder ob man die angegebenen Zahlen zu beobachten gewohnt oder überhaupt in der Lage ist. Da steigt ein Luftballon erst, fällt dann um $^1/_4$ seiner Höhe über Aufflugsort, steigt dann zu $^1/_{10}$ seiner neuen Höhe, fällt dann $^{19}/_{20}$ usf. Bei einem Neubau kosten die Erdarbeiten ausgerechnet $^1/_{128}$ der ganzen Summe usf. Gewiß ist es die Freude der Schüler am Rätsel, die derartige Aufgaben begreiflich erscheinen läßt. Zu den beliebtesten Aufgaben dieser Art zählen die altindischen: „die Quadratwurzel der Hälfte eines Wespenschwarmes ist ausgeflogen auf einen Jasmin“ usf. Welche sonderbaren Bestimmungen manchmal gegeben werden, erläutert das folgende Beispiel: Wenn ein Wagen 120 m vorwärts geht, dann machen die vorderen Räder 6 Umläufe mehr als die hinteren. Wenn jedes Rad aber um 1 m Umfang vergrößert würde (wie würde man das wohl anstellen?), so würden die Vorderräder auf der gleichen Strecke nur 4 Umdrehungen mehr machen als die Hinterräder.

Sehr beliebt sind, und das ist ja besonders für Gymnasien begreiflich, Aufgaben in historischem Gewande. Man wird solche alte Originalaufgaben durchaus gelegentlich gelten lassen: „Schwer bepackt ein Eselchen ging und des Eselchens Mutter . . .“ klingt einem noch heute in die Ohren, und die Originalaufgaben aus den alten Coss, die Heilermann-Diekmann in großer Zahl im Urtext geben, sind sicherlich für den Schüler sehr interessant. Menge und Werneburg haben geradezu eine Sammlung (für die Unterklassen bestimmter) antiker Rechenaufgaben herausgegeben: „Die Aufgaben der in unseren Gymnasien üblichen Rechenbücher sind oft wenig geeignet, das Interesse der Schüler und somit ihre Lust zur Lösung der Aufgaben zu erregen, weil sie Gebieten entnommen sind, die den Gedankenkreisen unserer Gymnasiasten fern liegen. Ein Ersatz dieser Aufgaben durch solche, die auf das unseren Schülern zunächstliegende Vorstellungsgebiet, nämlich das klassische Altertum sich beziehen, wird also voraussichtlich den Rechenunterricht auf dem Gymnasium fördern.“ Man wird vielleicht dann auf dieses Angebot eingehen können, wenn als Entgelt realistische Stoffe in der griechischen und lateinischen Lektüre geboten werden. In der Tat enthält z. B. von Wilamowitz-Moellendorfs Griechisches Lesebuch[1]) Abschnitte aus Euklid u. dgl. Aber abzulehnen ist jedenfalls das Umhängen eines fadenscheinigen antiken Mäntelchens um Alltägliches: Zu einer Mahlzeit gibt Cajus 7 Schüsseln, Sempronius 8; dann kommt Titus hinzu usf.

Sehr häufig begegnet man stillschweigend gemachten, aber durchaus nicht selbstverständlichen Voraussetzungen; die Arbeiter entwickeln,

1) 2 Bde. und 2 Bde. Erläuterungen. Berlin. (Weidmann.) 1902. Übrigens wird, wie ich höre, leider auf den Gymnasien meist nur der Band benutzt, der frei von mathematischen und naturwissenschaftlichen Stoffen ist.

wie schon gesagt, fast immer den gleichen Fleiß. Noch eine andere Aufgabe, die leicht zur Oberflächlichkeit erziehen kann: Vier Ursachen bringen einzeln in den Zeiten t_1, t_2, t_3, t_4 die Wirkungen e_1, e_2, e_3, e_4 hervor. In welcher Zeit bringen die 4 Ursachen gleichzeitig wirkend die Wirkung E hervor? Dabei ist offenbar als selbstverständlich vorausgesetzt, daß die Wirkungen sich arithmetisch addieren und daß sie proportional der Zeit sind.

Die Beispiele, die wirklich praktischen Stoffen entlehnt sind, sind dünn gesät; neben den berüchtigten Bewegungsaufgaben, (eine Systematik dieser und einiger anderer Aufgabengruppen gibt Walter) etwas Geometrie, dann wohl auch einmal eine Legierung oder ein spezifisches Gewicht; um so häufiger aber Wasserbehälter mit komplizierten Röhren, Weinsorten, Nußhaufen, Pferdehandel, Erbschaft, Spiel und dgl.

Der alten Aufgabe steht die moderne Aufgabe gegenüber. Auch der Inhalt der Aufgabe soll wertvoll sein, ebenso wie es der Inhalt der lateinischen, der griechischen Lektüre ist. Wir haben diese Richtung schon bei Gelegenheit der geometrischen Aufgabe gekennzeichnet. Die Tendenzen sind dieselben, aber die Ausdehnungsmöglichkeit ist für die arithmetische Aufgabe ungleich größer. Sachgebiete sind in erster Linie die Unterrichtsgegenstände der Schule: die Geometrie, das weite Feld der Physik und der Technik, die Chemie, die Astronomie, die Nautik usf. Schülke erinnert an einen Ausspruch Jägers, die Schule habe als Hauptaufgabe die Erziehung zum öffentlichen Leben; die Mathematik hat in der arithmetischen Aufgabe – natürlich nicht nur in dieser – Gelegenheit, dieser Verpflichtung gerecht zu werden. Also Wirtschaftsgeschichte und, um ein spezielles Kapitel zu nennen, Versicherungswesen. Man sehe in dieser Hinsicht etwa Müller-Kutnewsky, Schwab-Lesser, die neue Bearbeitung des Heis, des Kambly-Langguth durch; das ist ein Verdienst von M. Cantors Schrift „Politische Arithmetik[1])“, in neuerer Zeit auch eines Aufsatzes von O. Nitsche[2]).

Wie bei der trigonometrischen Aufgabe waren es wieder A. Richter und Schülke, die in ihren Aufgabensammlungen reiches Material von Anwendungen herangeschafft haben, meistens aus älteren Quellen das Nützliche sichtend; daneben ist besonders Fenkner zu nennen. Der Einfluß der modernen Anschauungen offenbart sich recht greifbar in unseren neueren Aufgabensammlungen (z. B. Müller-Kutnewsky, Schulze-Pahl); auch die älteren Sammlungen von Bardey und Heis tragen den neuen Forderungen in ihren Neubearbeitungen, wenn auch wohl nicht in hinreichendem Maße, Rechnung; andernfalls wären sie wohl über kurz oder lang des Schicksals des hundertjährigen Meyer Hirsch gewiß. Andere sind allerdings noch zurückhaltend, wie etwa Reidt, Wrobel, Schmehl: „Wenn der Unterricht der Mathematik und

1) M. Cantor, Politische Arithmetik des täglichen Lebens. 2. A. Leipzig. (Teubner.) 1903.

2) O. Nitsche, Lehrproben und Lehrgänge. 1907.

Physik sich nicht in den Händen desselben Lehrers befindet, so muß der Mathematiker, wenn er physikalische Aufgaben behandeln will, sich über die zur Lösung erforderlichen Kenntnisse der Schüler erst informieren und muß unter Umständen vielerlei sachliche Erklärungen vorausschicken". Besonders der letzte Grund dürfte bei vielen entscheidend in die Wagschale fallen. Die alte Aufgabe ist für den Lehrer bequemer, vor allem aber auch nicht so zeitraubend — und zwar Zeit für das Nicht-Mathematische raubend.

Ein sehr beachtenswertes Moment spielt in der Aufgabensammlung von Schwering eine Rolle. Bei ihm reicht der Aufgabenstoff häufig in Gebiete der höheren Mathematik hinein: „Wenn zwei Aufgaben von gleicher Schwierigkeit vorliegen, eine mit, eine ohne wissenschaftlichen Hintergrund, so glaube ich erstere unbedingt vorziehen zu sollen, selbst wenn ich dem Tertianer nicht sagen kann, weshalb ich so verfahre". Dem Sekundaner kann man es beiläufig manchmal schon sagen. So spielen neben den gewohnten Sachgebieten auch Interpolation, Partialbruchzerlegung, ja sogar elliptische Koordinaten hinein, vor allem aber die Zahlentheorie (Kongruenzen, Potenzreste, Siebzehneck usf.).

22. Funktionsbegriff und graphische Darstellung.

Charakteristisch für die Lehre von den Funktionen im Schulbetrieb ist die Verknüpfung des arithmetischen Ausdrucks mit dem geometrischen; der Versuch, den rein arithmetischen Weg der Schule zu erschließen, den Lanner gemacht hat, darf wohl als mißglückt angesehen werden. Ein gleiches ist zu sagen von der Absicht M. Simons, der, wenn er 1884 in seinen „Elementen der Arithmetik als Vorbereitung auf die Funktionstheorie" als das dem arithmetischen Unterricht bislang fehlende „feste Ziel" den Funktionsbegriff bezeichnet, durchaus die Funktion der komplexen Variablen im Auge hat.

Der Funktionsbegriff beschränkt sich in der Schule auf reelle Variable und bildet mit der graphischen Darstellung ein gemeinsames Ganze. Im Unterricht werden Arithmetik und Algebra stets einander durchdringen und sich gegenseitig ergänzen, für die „Reformer" kommt zu diesem Bunde noch ein Drittes, die beiden andern beherrschende hinzu, der Funktionsbegriff. Im systematischen Lehrbuch werden allerdings alle drei Dinge scheinbar fremd nebeneinander hergehen können, und man hat daraus zuweilen auch auf den Unterricht geschlossen. Aber dann müßte man auch aus der Trennung von Arithmetik und Algebra im systematischen Buche auf eine strenge Scheidung der beiden Gebiete im Unterricht schließen.

Die Benutzung des Funktionsbegriffes und der graphischen Darstellung auf der Unterstufe geht einige Jahrzehnte zurück. Man findet z. B. die Begriffe Funktion, Stetigkeit, Ableitung in Frischaufs Arithmetik, ein kurzes Kapitel über graphische Darstellung im alten Bardey, ebenso

begegnet man zuweilen der Parabeldarstellung $y = x^2 + ax + b$ (z. B. bei Schüller). Baltzer geht recht ausführlich auf den Funktionsbegriff ein, der bei ihm schon in der Proportionenlehre, dann bei den Gleichungen ersten und zweiten Grades eine beherrschende Rolle spielt.

Grundlegend ist der Funktionsbegriff bei Gallenkamp, bei dem z. B. auf Funktionalgleichungen wie

$$f(x + y) = f(x) + f(y),$$
$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

u. dgl. hingewiesen wird. Bei diesen übrigens für die Oberstufe bestimmten Ausführungen fällt aber die Beschränkung auf „mathematische" Funktionen – die empirischen Kurven werden also nicht erwähnt – und das Zurücktreten der graphischen Darstellung ins Gewicht. Ganz ähnlich stellt sich auch Tellkampf zu der Frage, wenngleich bei ihm in der analytischen Geometrie der Anschluß an die geometrische Form der Funktion hergestellt wird; wir begegnen dort Aufgaben, Kurven

$$y = 7x^3 - 5x^2 + 3x - 10$$

usf. zu zeichnen.

Daß jetzt aber der Funktionsbegriff in fast allen Lehrbüchern Eingang zu finden beginnt, ist trotz dieser immerhin vereinzelten Vorgänger eine Frucht der Reformbewegung.[1]). Von systematischen Leitfäden und Lehrbüchern, die, soweit sie älteren Datums sind, um die Nebeneinanderbenutzung der alten und neuen Auflagen zu ermöglichen, meist den betreffenden Abschnitt im Anhang bringen, sind hier zu nennen Thieme, Pietzker, Kambly-Langguth, Schulte-Tigges-Mehler, Bork-Crantz-Haentzschel, Heinrich Müller, von Aufgabensammlungen in erster Linie Schülke, dann die neue Bearbeitung des Heis und Fenkner. Andere Lehrbücher und Aufgabensammlungen zögern noch oder bringen doch erst in der Oberstufe den Funktionsbegriff (z. B. Schmehl). Die zahlreichen, später noch zu besprechenden Lehrbücher der Infinitesimalrechnung, die in den ersten Jahren der Reformbewegung wie Pilze aus dem Boden geschossen sind, bringen fast sämtlich Einleitungen in die Analysis, die schon für die Unterstufe berechnet oder doch verwendbar sind. Eines dieser Ergänzungsbücher, das von H. Dreßler, sei schon hier erwähnt, weil es nicht bis zur Infinitesimalrechnung vordringt. Gutes und reichhaltiges Material für den Unterricht gibt dem Lehrer ein ausführliches Buch von Lesser[2]).

---

1) Auf die Geschichte der Reformbewegung usw. kann hier nicht eingegangen werden. Man vergl. A. Gutzmer, Die Tätigkeit der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte. Leipzig. (Teubner.) 1908 und F. Klein und R. Schimmack, Vorträge über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen. Teil I: Von der Organisation des mathematischen Unterrichts. Leipzig. (Teubner.) 1907.

2) O. Lesser, Graphische Darstellungen im Mathematik-Unterricht der höheren Schulen. Leipzig u. Wien. (Freytag u. Tempsky.) 1908.

Diejenigen Lehrbücher, nach denen man sich bisher am besten über den bei der Darstellung des Funktionsbegriffes im Sinne der Reformbewegung eingeschlagenen Weg orientieren kann, sind die neuen Bücher von Schwab-Lesser und Behrendsen-Götting[1]), dazu vielleicht noch ein kleines Heft von Weill[2]). Das Charakteristische der Behrendsen-Göttingschen Methode ist, und insofern kann sie gegenwärtig als weitester Vorstoß der Reformbewegung gelten – die Unterstufe des Lehrbuches von Schwab-Lesser ist ein klein wenig konservativer –, daß der Funktionsbegriff und seine geometrische Deutung nicht wie bei den anderen älteren Lehrbüchern als ein bloßes accedens, eine neue Betrachtungsweise des in üblicher Weise schon behandelten Stoffgebietes hinzukommt, sondern daß er an der Spitze der einzelnen Abschnitte steht, daß er die Disposition beherrscht. Es ist wie in der Planimetrie mit der Geometrie der Lage: die einen benutzen die Methoden, behalten aber das System Euklids bei, die anderen dagegen lassen auch das System sich bestimmen nach den angenommenen Methoden. Der zweite Weg ist der befriedigendere, kommt aber naturgemäß oft in Konflikt mit den Rücksichten, die ein an konservativen Anstalten eingeführtes Schulbuch nehmen muß.

Einige Andeutungen über den Lehrstoff mögen genügen. Nach einer Einführung in den Koordinatenbegriff und den Begriff der graphischen Darstellung an der Hand empirischer Kurven gliedert sich der Lehrgang in zwei große Kapitel: Erstens wird die lineare ganze Funktion und ihre Darstellung durch eine Gerade betrachtet. Dabei werden insbesondere die ganze Proportionenlehre erledigt und natürlich die Gleichung ersten Grades und zwei Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten. Das zweite Kapitel wird durch die Diskussion der Parabel $y = ax^2$ und ihre Verschiebung eingeleitet, wobei gleich auch die Parabel n^{ter} Ordnung $y = x^n$ gestreift wird. Hier lassen sich übrigens die Gleichungen der Form

$$x^n + ax + b = 0$$

anschließen. Man bringt eine feste Parabel n^{ten} Grades, die am besten auf durchscheinendes Papier gezeichnet ist (Heinrich Müller legt seiner Einführung, Müller-Witting seinem Lehrbuch eine solche Parabel zweiten Grades bei), zum Schnitt mit der Geraden

$$y + ax + b = 0.$$

1) Die nach Fertigstellung der Arbeit erschienene 13. Auflage von Heilermann-Diekmanns Algebra ist gleichfalls an dieser Stelle zu nennen. Auch hier ist der Funktionsbegriff und die graphische Darstellung in allen Kapiteln an die Spitze gestellt. Immerhin ist das Buch systematischer als das mehr methodische und deshalb zu einer Orientierung für den Außenstehenden geeignetere Lehrbuch von Behrendsen-Götting.

2) Im Anschluß an diese kleine Aufgabensammlung, die auch die Infinitesimalrechnung in sich begreift, sind von A. Weill sehr praktische „Graphische Hefte" herausgegeben. (Gebweiler, J. Boltze); eines für Mathematik und eines für Geographie, Wirtschaftslehre und Statistik. Die Hefte enthalten, mit weißem Papier durchschossen, Millimeterpapier, daneben auch einen durchscheinenden Bogen, und auf den ersten Seiten einige charakteristische Kurven.

In dem zweiten Kapitel werden dann weiter Potenzrechnung und Wurzelrechnung behandelt, die verschobene Parabel leitet zur allgemeinen Gleichung zweiten Grades über.

Die Methoden der graphischen Darstellung werden natürlich auch angewandt auf andere funktionale Zusammenhänge, insbesondere auf die trigonometrischen Funktionen, die logarithmische und die Exponentialfunktion. Diese Kurven bürgern sich immer mehr im Unterricht und deshalb auch im Lehrbuch ein, man begegnet ihnen jetzt zuweilen sogar schon in Logarithmentafeln.

23. Analytische Geometrie.

Auf der Oberstufe kommt die analytische Wechselbeziehung zwischen geometrischer und arithmetischer Darstellungsform in zweifacher Weise zu Wort. Das eine Mal ist der Ausgangsort die Geometrie; es werden für geometrisch definierte Gebilde arithmetische Ausdrücke gefunden, das ist in der analytischen Geometrie der Fall. Das andere Mal ist der arithmetische Ausdruck das Gestaltgebende, der geometrische der Hilfswert. Das ist dann die Fortführung der in der Unterstufe aufgenommenen Untersuchungen von Funktionen mit Hilfe der graphischen Darstellung. Das in der Oberstufe neu, wenn auch nicht unvermittelt auftretende Moment, liefern dabei infinitesimale Betrachtungen. Sie stellen ein zweites, großes Gebiet des Unterrichts der Oberstufe dar, die Infinitesimal-Analysis.

Die analytische Geometrie ist in den realistischen Anstalten schon stets gelehrt worden, in den Gymnasien Preußens hat sie sich erst 1892 ihren Platz im Lehrplan erworben. Der Stoff ist jetzt fast durchweg auf die analytische Geometrie der Ebene und hier auf die Kegelschnittlehre beschränkt. Früher wurden auf den realistischen Anstalten von der analytischen Geometrie des Raumes wenigstens einige Grundbegriffe gegeben, z. B. Ebene und Gerade im Raum, vgl. Erler; Rotations-Ellipsoide u. dgl. bei Servus; etwa ebensoweit ging Tellkampf. Erheblich mehr brachte dagegen Gallenkamp[1]), der sogar die Flächen zweiten Grades, ausgehend von der allgemeinen Gleichung zweiten Grades mit drei Variablen behandelte.

Früher hob sich die analytische Geometrie, die meist an das Ende des ganzen Schulunterrichts gestellt wurde, merklich von dem ganzen vorangehenden Stoffe ab durch das neue Moment der Verbindung arithmetischer und geometrischer Methode. Dort, wo die graphische Darstellung das Feld von der Unterstufe an vorbereitet hat, sind die Methoden nicht mehr neu, es findet vielmehr ein kontinuierlicher Übergang statt; wie dieser sich gestaltet, kann man etwa bei Dreßler nachlesen. Ein weiterer Erfolg der Reformbewegung scheint der zu sein,

1) Vergl. außer den Elementen auch W. Gallenkamp, Über die Flächen zweiten Grades. Progr. Friedrichs-Werdersche Gewerbeschule. Berlin. 1868.

daß heute mehr als früher Wert auf exakt ausgeführte Zeichnungen (häufig auf Millimeterpapier) gelegt wird.

Der übliche Lehrgang ist kurz der folgende (nach Gandtner; der hochschulmäßigen Behandlung stehen etwas näher die Bücher von Fuhrmann, sowie von Ganter und Rudio; mehr noch als alle diese die eben erschienene Analytische Geometrie von E. Lutz): 1. Rechtwinklige Koordinaten; der Punkt, Länge einer Strecke. 2. Die Gerade (schiefwinklige Koordinaten). 3. Der Kreis (Polarkoordinaten, Koordinatentransformationen). 4. Die Parabel (Gleichung auf Grund der Ortdefinition, Diskussion der Gleichung; Parabel-Sekante und -Tangente. Quadratur der Parabel – meist „elementare" Integration –). 5. Die Ellipse. (Ähnlich wie eben, konjugierte Durchmesser). 6. Die Hyperbel. (Ähnlich wie die Ellipse; Gleichung der Hyperbel bezogen auf die Asymptoten). Den Beschluß macht in der Regel ein zusammenfassendes Kapitel, in dem z. B. die Scheitelgleichungen der drei Kegelschnitte und die Diskussion der allgemeinen Gleichung zweiten Grades mit zwei Unbekannten durchgeführt wird. Daß auch Pole und Polaren der Kegelschnitte mit einbezogen werden, dürfte seltener sein.

Der Stoff wird in dieser Reichhaltigkeit wohl nur an realen Anstalten behandelt, für den gymnasialen Kurs vergleiche man etwa das Heft von Schwering, der das ganze Gebiet in Aufgaben auflöst.

Die Aufgaben in der analytischen Geometrie haben in der Regel Berechnungen von Strecken, Winkeln, Flächen zum Gegenstand, jedes Lehrbuch gibt eine genügende Auswahl. Früher bevorzugte man dabei Buchstabenrechnung, mehr und mehr aber werden natürliche Zahlen benutzt und das Resultat dann durch die Zeichnung geprüft. Sehr fruchtbar sind Aufgaben, geometrische Örter analytisch aufzufinden; reichhaltig ist in dieser Hinsicht der Abschnitt in Koppe-Diekmanns Geometrie, deren Material teilweise auf einen Aufsatz von H. Pfaff[1]) zurückgeht (vgl. auch Bürklens Aufgabensammlung).

Auf die Kegelschnitte kommt man auch bei einem für die älteren rein algebraischen Problem, der Lösung von zwei Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten, deren graphisches Bild zwei sich schneidende Kegelschnitte sind (vgl. die ausführliche Darstellung in Schwab-Lesser). Allerdings benutzt man diese Darstellung häufig schon dann, wenn die Kegelschnitte noch nicht systematisch in der analytischen Geometrie behandelt sind. Man begnügt sich eben zunächst mit der durch Punktkonstruktion gefundenen Form der verschiedenen Kegelschnittarten.

24. Infinitesimalrechnung: Allgemeines; Differentialrechnung.

Es gab eine Zeit, in der, wenigstens in den Realanstalten Preußens, Differential- und Integralrechnung regelrecht im Unterricht betrieben wurden. Die Erlaubnis dazu wurde 1882 den Realgymnasien, 1892 auch

1) H. Pfaff, Geometrische Örter als Übungsstoff für die Prima. Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. 37 (1905), 253 und 321.

den Oberrealschulen entzogen. Immerhin hat es, bis 1902 mit zwei Aufsätzen von Klein und Götting[1]) die Bewegung für die Infinitesimalrechnung erneut lebhaft einzusetzen begann, Anstalten gegeben, an denen sich die Differentialrechnung bis heute ununterbrochen gehalten hat. Aus der älteren und dieser Übergangszeit stammen u. a. verschiedene Veröffentlichungen von H. Seeger. Neben einem Leitfaden, der in der Form der Darstellung einem Buche für jüngere Semester gleicht, hat Seeger mehrere Programmabhandlungen[2]) verfaßt, um weitere Kreise mit seinen Anschauungen bekannt zu machen.

Neben diesen vereinzelt laut werdenden Bestrebungen, die Schulen wieder der Differential- und Integralrechnung zu öffnen, bestand eine starke Gegenströmung, den Schulen die infinitesimalen Probleme nur in „elementarer" Behandlung darzubieten. Man muß sich dabei vergegenwärtigen, daß Anwendungen infinitesimaler Methoden, so insbesondere die Lehre von den Maximis und Minimis und die unendlichen Reihen immer auf dem Lehrplan stehen geblieben sind, daß die Lehrpläne also geradezu die Forderung stellten, alles das mit elementaren Methoden zu behandeln. In der Mehrzahl waren das natürlich verschleierte Differentiationen und Integrationen, man nannte nur nicht diese Namen. Charakteristisch ist in dieser Hinsicht das Vorgehen Schellbachs in den Anhängen des auf Schellbachs Anregungen zusammengestellten Leitfadens von Mehler und in einem kleinen Lehrbuch über die Maxima- und Minima-Lehre. Hier wird in Wirklichkeit bis zum zweiten Differentialquotienten teilweise unter Heranziehung seiner Bedeutung in der Mechanik vorgegangen. Man hat fast den Eindruck, daß der Verfasser der Verfügung, Differential- und Integralrechnung aus dem Lehrstoff zu streichen, ein Schnippchen hat schlagen wollen. Dieses Verfahren hat sich dann als Schellbachsche Methode vielfach eingebürgert. (Vgl. z. B. Fenkner.)

Ganz im Gegensatz zu Schellbach nannte Gallenkamp, der die Infinitesimalrechnung auch für Gymnasien forderte[3]), die Dinge beim richtigen Namen. In einer umfangreichen „Einleitung in die höhere Analysis" im 3. Bande seines Leitfadens (1880) bringt er die Grundbegriffe der Differential- und Integralrechnung in ziemlich strenger Form, auch nicht in konsequenter Verbindung mit der graphischen Darstellung;

---

1) F. Klein, Über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen. Jahresb. d. Deutsch. Math.-Verein. **11**, S. 128 und E. Götting, Über das Lehrziel im mathematischen Unterricht der höheren Realanstalten. Ebenda **11**, S. 189. Beide abgedruckt in F. Klein und E. Riecke, Neue Beiträge zur Frage des mathematischen Unterrichts an höheren Schulen. Leipzig. (Teubner.) 1904.

2) H. Seeger, Über die Stellung des hiesigen Realgymnasiums zu einem Beschlusse der letzten Berliner Schulkonferenz (Progr. Güstrow 1891) und besonders H. Seeger, Bemerkungen über Abgrenzung und Verwertung des Unterrichts in den Elementen der Infinitesimalrechnung. Güstrow. (Opitz & Co.) 1894.

3) W. Gallenkamp, Über den mathematischen Unterricht im Gymnasium. Zeitschrift für das Gymnasialwesen. **31** (1877), 1.

als Anwendungen erscheinen eine wieder recht exakte Reihentheorie (z. B. mit Restgliedbetrachtungen), Diskussionen unbestimmter Ausdrücke, Maxima- und Minima-Untersuchungen, schließlich auch Kurvenbetrachtungen im Anschluß an die analytische Geometrie (Krümmungskreis).

Die Bewegung zur Einführung der Infinitesimalrechnung hat, zumal nach den Meraner Vorschlägen[1]), mit einer großen Zahl von Lehrbüchern eingesetzt. In einer ersten Periode waren es besonders Leitfäden der Infinitesimalrechnung für Schulen, die teilweis schon auf länger zurückliegende Erfahrungen zurückgriffen, übrigens in der ganzen Anlage sehr weit voneinander und auch von den Meraner Vorschlägen abwichen. Ich nenne aus dieser ersten Periode die Bücher von H. Grünbaum (mehr für mittlere technische Lehranstalten geschrieben), von Niemöller und Dekker (Heft IV), von Schröder, deren Verdienst zunächst einmal schon das ist, den Wahn zerstört zu haben, daß Differentialrechnung für Schüler unverständlich sei; im übrigen denken sich diese Bücher im Gegensatz zu den Meraner Vorschlägen die Infinitesimalrechnung als ein besonderes, der analytischen Geometrie und der sogenannten niederen Analysis angehängtes Lehrgebiet der Prima. 1906 folgen dann L. Tesař und O. Lesser, die beide schon erheblich mehr eine allmähliche Einführung der Infinitesimalbegriffe erkennen lassen; besonders Tesař scheint aber noch mehr auf die Belehrung des Lehrers als für den Schüler berechnet zu sein. Die Zahl der Aufgaben reicht jedenfalls nicht aus. So füllte 1907 das Heft von Schülke, das in der Hauptsache Aufgabensammlung ist, eine Lücke aus. Aus 1908 nenne ich noch schließlich Düsing, der die geometrisch-anschaulichen Ableitungen in den Vordergrund stellt, aber überall da, wo er damit nicht auskommt, für die höheren Schulen zu primitiv ist; sein Buch, das ursprünglich in etwas kürzerer Form in der Zeitschrift „Technik und Schule" erschienen ist[2]), paßt auch wohl in erster Linie für technische Fachschulen.

Eine zweite Periode läßt sich charakterisieren durch die allmähliche Aufnahme des Stoffes in die alten Lehrbücher. Natürlich wird dabei oft das Neue zunächst als ein Fremdkörper erscheinen; denn die neue Auflage soll möglichst neben der alten gebraucht werden können, und zudem ist die Zahl der Konservativen sehr groß (haben doch z. B. am alten Kambly 1906 noch 67 Anstalten festgehalten, obwohl damals die Neubearbeitungen schon mehr als 5 Jahre zurücklagen). Von Lehrbüchern, welche auf die Reformbestrebungen in ihren neuesten Auflagen eingehen, nenne ich Kambly-Langguth (bearbeitet von A. Thaer), Heilermann-Diekmann, Heinrich Müller, von Aufgabensammlungen Müller-Kutnewsky, Heis.

1) Vgl. A. Gutzmers oben zitierten Bericht.
2) Technik und Schule. I. Band, 3. Heft (1907), 175.

Eine dritte Periode ist erst im Anfang; es ist, wenn wir von Müller-Witting, der sich in seinem arithmetisch-analytischen Teil fast vollständig an Heinrich Müller anschließt, absehen, erst ein einziges „modernes" Lehrbuch für die Oberstufe erschienen, dasjenige von Schwab und Lesser; das von Pietzker kann hier nicht in Betracht kommen, da Pietzker gegenüber der Differential- und Integralrechnung eine ablehnende Stellung einnimmt.

Wenn wir auch hier wieder einige in der Hand des Lehrers nützliche Bücher über Infinitesimalrechnung, die gelegentlich auch einmal ein Schüler bei privater Arbeit benutzen kann, anführen, so ist zwar für diesen Zweck die Auswahl an wissenschaftlichen Werken sehr groß, nicht aber die Zahl derjenigen, deren Darstellung schulgemäß ist. Selbst das Bändchen der allgemeinverständlichen Sammlung „Aus Natur und Geisteswelt" von Kowalewski[1]) ist durchaus als rein wissenschaftlich anzusprechen. Dagegen ist nachdrücklich auf Burkhardts Differential- und Integralrechnung[2]), daneben auf die Einführung von Nernst und Schoenflies[3]) hinzuweisen.

Das, was von der Differentialrechnung in den Lehrbüchern gebracht wird, sind erstlich die Ableitungen einiger für den Unterricht wichtiger Funktionen (x^n, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, e^x, $\log x$, $\operatorname{arc}\tan x$ usw.) und einige Differentiationsregeln (Summe, Produkt, Quotient, Funktion einer Funktion, $\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=1$); daran schließt sich dann die mehrfache Differentiation. Auf implizite Funktionen wird selten eingegangen, ebensowenig auf partielle Differentiation (die Aufgaben für die Reifeprüfungen zeigen jedoch, daß der Unterricht in einzelnen Fällen soweit geht). Die Ableitung der Resultate geschieht unter Benutzung des Grenzbegriffes im engsten Anschluß an die graphische Darstellung der Funktionen, auch für die Rechenregeln (z. B. $\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=1$) ist man auf ein Zurückgehen auf die Anschauung bedacht, man beschränkt sich also von vornherein auf „vernünftige" Funktionen.

Die Frage, ob man Differentiale benutzen soll, ist noch als offene anzusehen; die einen vermeiden sie (Schroeder, Heilermann-Diekmann), andere benutzen sie (Schülke, Lesser, Kambly-Langguth). Ausschlaggebend für diese Frage ist wohl, ob man bis zur Integralrechnung vorgeht oder nicht.

Methodisches Prinzip der im Sinne der Meraner Vorschläge Arbeitenden ist es, den Schüler mit dem Begriff des Differential-

[1]) G. Kowalewski, Einführung in die Infinitesimalrechnung. Leipzig. (Teubner.) 1908.

[2]) H. Burkhardt, Vorlesung über die Elemente der Differential- und Integralrechnung und ihre Anwendung zur Beschreibung von Naturerscheinungen. Leipzig. (Teubner.) 1907.

[3]) W. Nernst und A. Schoenflies, Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften. 4. A. München 1904.

quotienten allmählich vertraut zu machen, also ein erstes Mal bereits gelegentlich auf der Unterstufe im Anschluß an die dort behandelten Funktionen. So wird, um ein Beispiel dafür zu geben, von Schwab-Lesser bereits in Untersekunda an der die rationale ganze Funktion zweiten Grades darstellenden Kurve das sog. Schellbachsche Verfahren zur Bestimmung des Maximums oder Minimums durchgeführt. Auf der Oberstufe ist dann irgendwo eine Zusammenfassung und eine Vervollständigung dessen geboten. In den systematischen Lehrbüchern ist von dieser methodischen Forderung (die auch wohl noch nicht allgemeine Zustimmung gefunden hat), wie das in der Natur dieser Bücher liegt, kaum etwas zu merken.

25. Infinitesimalrechnung: Anwendung der Differentialrechnung, Integralrechnung.

Als Anwendungsgebiete der Differentialrechnung kommen in Betracht:

1. Die Kurvendiskussionen. In vielen Fällen beschränkt man sich auf Kegelschnitte und etwa Sinuskurven, wobei dann wenigstens die Tangenten, oft auch die Krümmungskreise und die Wendetangenten betrachtet werden. Schroeder geht darüber hinaus und betrachtet außerdem: Zissoide des Diokles, Zykloide, Lemniskate, Kardioide. Auch die neueste von Thaer bearbeitete Auflage der Kambly-Roederschen Stereometrie bringt einige höhere Kurven. Übrigens werden schon bei A. Wiegand (7. A. 1891) Kurven höherer Ordnung und transzendente Kurven mit Benutzung der Elemente der Differentialrechnung diskutiert, und Ähnliches geschieht vielfach im Unterricht.

Ganz erheblich weiter geht das Lehrbuch von Schwab-Lesser. Hier knüpft die ganze Behandlung der rationalen Funktion an die sie darstellenden Kurven an. Diese Kurven werden unter Benutzung des ersten und der höheren Differentialquotienten ausführlich diskutiert, insbesondere wird natürlich die ganze rationale Funktion dritten und vierten Grades untersucht.

Dort, wo Differentialrechnung nicht als solche betrieben wird, wo jedoch in der analytischen Geometrie die Ableitung der Tangentengleichung notwendig wird, führt man den Grenzübergang in möglichst einfacher Form jedesmal besonders durch. Holzmüller behandelt auch die Krümmungskreise der Kegelschnitte mit elementaren Methoden.

2. Die Lehre von den Maximis und Minimis wird dort, wo die Differentialrechnung den Schülern bekannt ist, in engster Anlehnung an die graphische Darstellung sehr schnell erledigt. Übel sind hier diejenigen daran, die sich ohne Differentialrechnung behelfen und auf ganz elementare Fälle beschränken müssen; deshalb ist gerade hier die Einführung des Differentialquotienten ad hoc, zumal wenn die graphische Darstellung und der Funktionsbegriff bekannt sind, recht häufig (Schulze-Pahl, Bork-Nath); die Regel, man solle $f(x_1) - f(x_2)$ bilden, durch $x_1 - x_2$ dividieren und zur Grenze übergehen, die in „elementar“ ver-

fahrenden Büchern immer wiederkehrt, (z. B. Lieber-von Lühmann, Kambly-Roeder, Stereometrie von 1896, in Anlehnung an graphische Darstellung), wird häufig als Schellbachsches Verfahren (Fenkner, Heinrich Müller) bezeichnet (siehe oben Abschnitt 23). Die Entscheidung, ob ein Maximum oder ein Minimum eintritt, auf Grund des Vorzeichens des 2. Differentialquotienten, wird auch Regel von Fermat[1]) genannt (Heinrich Müller, man vergleiche auch die von A. Schmidt stammende Methode bei Bork-Nath).

Ohne Differentiation kommt man ziemlich einfach in den Fällen aus, die auf rationale ganze Funktionen zweiten Grades führen, auf diesen Fall wird daher in den ohne Infinitesimalrechnung operierenden Büchern besonderer Wert gelegt (vgl. Holzmüller, Pietzker, auch Heinrich Müller, Bork-Nath). Daran schließen sich dann zuweilen noch andere auf elementarem Wege zu erledigende Probleme, insbesondere solche, wo die trigonometrischen Funktionen hineinspielen.

3. Als dritte Anwendung der Differentialrechnung im Unterricht nenne ich die Newtonsche Methode zur angenäherten numerischen Berechnung von Wurzeln. Das Problem wird von fast allen Büchern, die es bringen, in algebraischer Form angefaßt; dabei spielt die Ableitung der Funktion ihre Rolle, wird jedoch manchmal (z. B. bei Bardey-Hartenstein) nicht in Beziehung gesetzt zu ihrer in anderen Fällen, z. B. bei den Maximis und Minimis benutzten geometrisch-anschaulichen Bedeutung. Nur in wenigen Lehrgängen wird die gerade hier besonders aufklärende graphische Darstellung ausgenutzt; übrigens ergeht es der einfacheren regula falsi zuweilen ebenso. Im modernen Lehrbuch (Schwab-Lesser) wird dieses Kapitel im organischen Zusammenhang mit der graphischen Darstellung der rationalen ganzen Funktion stehen.

Auf die Anwendung der Differentialrechnung auf Mechanik gehen wir hier nicht ein, es sei nur bemerkt, daß viele Leitfäden der Infinitesimalrechnung dieses Gebiet berühren, daß aber von seiten der Physik noch kaum Anzeichen eines Reagierens vorliegen.[2]) Die Internationale

1) Diese Bezeichnung geht wahrscheinlich auf eine Bemerkung Fermats am Schlusse einer Abhandlung de maximis et minimis zurück (D. Petri de Fermat, Varia opera mathematica. Tolosae. (J. Pech.) 1669; Neue Ausgabe: Berolini (Friedländer.) 1861, pg. 69–73. = Oeuvres p. p. (Tannery I, pg. 166), auf die mich Herr Conrad Müller-Göttingen aufmerksam gemacht hat. Dort wird untersucht, wo bei einer Kurve ein Wendepunkt auftritt und diese Aufgabe auf ein Minimumproblem für den Winkel zwischen Kurventangente und y-Achse zurückgeführt. – Übrigens ist die Fermatsche Regel wohl zu unterscheiden von der Fermatschen Methode (dieser Ausdruck findet sich z. B. bei Heinrich Müller, Ausg. A, 2. Teil, 3. A.). Damit ist die Lösungsweise der Maxima- und Minima-Aufgaben gemeint, die Fermat im Anfang der eben genannten Abhandlung gibt.

2) In F. Poske, Oberstufe der Naturlehre. 2. A. Braunschweig. (Vieweg.) 1909 werden Geschwindigkeit und Beschleunigung exakt, jedoch in Limes-Schreibweise eingeführt. – Herr F. Poske schreibt mir dazu: „Die Physiklehrbücher können noch nicht reagieren, solange die Grundbegriffe der Infinitesimalrechnung nicht als allgemein bekannt vorausgesetzt werden können.

Mathematische Unterrichtskommission beabsichtigt über die Mechanik einen besonderen Bericht herauszugeben.

Als ein zweites Gebiet der Infinitesimalrechnung kommt für die Schule die Reihentheorie in Betracht. Es ist üblich, gewisse Gruppen endlicher Reihen, die arithmetischen und geometrischen, vorweg zu nehmen. Man teilt dabei gewöhnlich in einfache und in Reihen höherer Ordnung. Die erste, wichtigere Gruppe gibt Anlaß zu zahlreichen Anwendungen der Zinseszins- und Rentenrechnung; Stoff bringt hier jede Aufgabensammlung, es sei aber noch ausdrücklich auf eine Programmarbeit von Krug[1]) hingewiesen, die auch auf die möglichst praktische Anlage des Rechenschemas achtet. Die zweite Gruppe wird immer mehr eingeschränkt; hier werden die sogenannten figurierten Zahlen, die Polygonal- und Pyramidalzahlen und dgl. behandelt. (Man vgl. z. B. Spieker, Wittstein im Band über Analysis).

In der Lehre von den unendlichen Reihen wird zunächst der Begriff der Konvergenz besprochen, und man geht nun zur Aufstellung einiger Reihen über. Dort wo Differentialrechnung bekannt ist, wird die Mac Laurinsche und die Taylorsche Reihe abgeleitet und dann zur Reihendarstellung einzelner Funktionen geschritten. Betrachtungen des Restgliedes, wie sie sich, wie bereits erwähnt, bei Gallenkamp finden, fallen in der Mehrzahl der Fälle fort, man möchte eben nicht bis zum Mittelwertssatz vordringen. Man stellt sich deshalb auf einen mehr empirischen Standpunkt, indem man die Annäherung von Funktionen durch Polynome unter dem Bilde und unter steter Kontrolle durch die Annäherung einer Kurve durch Parabeln[2]) untersucht. (Siehe wieder Schwab-Lesser). Wo man nicht die Taylorschen Entwicklungen bringt, hilft meist die sogenannte Methode der unbestimmten Koeffizienten aus. Es ist merkwürdig, daß auch in einzelnen Fällen, wo neuerdings Differentialrechnung betrieben wird, ja wo die Taylorsche Reihe entwickelt wird, nicht von dieser Ableitungsmöglichkeit voller Gebrauch gemacht, sondern zunächst wenigstens andere Wege eingeschlagen werden (Heilermann-Diekmann).

Reihen werden entwickelt etwa für $(1+x)^n$, wo n eine beliebige rationale Zahl ist, $\sin x$, $\cos x$, e^x, $\log(1+x)$, $\operatorname{arc}\tan x$. Die Ableitung nach der Mac Laurinschen oder Taylorschen Reihe ergibt sich unmittelbar; einige Andeutungen seien jedoch gemacht über die üblichsten „elementaren" Herleitungen.

1) Krug, Die niedere Analysis auf der Unterstufe des Realgymnasiums. Progr. Kgl. Realgymnasium Stuttgart. 1903.

2) Vergl. W. Lorey, Über die Maclaurinsche und Taylorsche Entwicklung einer Funktion. Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. **39** (1908), 361 und R. Schimmack, Über die Gestaltung des mathematischen Unterrichts im Sinne der neueren Reformideen. Ebenda **39** (1908), 513. Leider sind diese Methoden noch recht wenig verbreitet. Nimmt doch A. Weill's Aufgabensammlung die Taylorsche Reihenentwicklung deswegen nicht auf, „weil sie in keine brauchbare Beziehung zur graphischen Abbildung gebracht werden konnte."

Der Ausdruck $(1+x)^n$ wird zunächst als Binomialsatz für positives ganzes n ausgesprochen (siehe Abschnitt 17) und da, sei es durch Schluß von n auf $n+1$, sei es unter Heranziehung der Kombinatorik bewiesen. Jetzt untersuchen die einen, was aus der Reihe wird, wenn n negativ oder gebrochen ist; unter Benutzung der Funktionalgleichung

$$f(n) \cdot f(m) = f(n+m)$$

wird dann der Satz auch für diese Exponenten bewiesen (vgl. etwa Lieber und von Lühmann, Heilermann-Diekmann). Ein anderer Weg ist der, daß die Potenzreihe mit unbestimmten Koeffizienten angesetzt und dann differenziert wird (ohne daß das besonders gesagt wird; man bildet eben $(1+x)^n - (1+y)^n$ und dividiert durch $x-y$), dann kann man durch Koeffizientenvergleichung die Koeffizienten finden (z. B. Fenkner, Thieme).

Die Reihe für e wird durch Auswertung von

$$\lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

gefunden und ähnlich der Ausdruck für e^x. Von da aus erhält man dann durch einen Kunstgriff $\log(1+x)$; es ist

$$\lim_{n=0} \frac{(1+x)^n - 1}{n} = \log \operatorname{nat}(1+x).$$

Die Reihen für $\sin x$ und $\cos x$ werden von den einen aus dem Moivreschen Theorem gewonnen, indem in

$$\cos x + i \sin x = \left(\cos\frac{x}{n} + i \sin\frac{x}{n}\right)^n$$

zur Grenze $n=\infty$ übergegangen wird, andere benutzen wieder die Methode der unbestimmten Koeffizienten, da nach zweimaliger Differentiation (von der natürlich wieder nichts gesagt wird) die Reihe links wieder auftritt.

Die arc tan-Reihe erhält man entweder durch eine ziemlich komplizierte (verdeckte) Differentiation, welche die Regel $\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1$ benutzt (z. B. bei Spieker, Wrobel), und nachfolgende Koeffizientenvergleichung, oder dadurch, daß man unter Benutzung von

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

die Beziehung

$$\operatorname{arc}\tan x = \frac{1}{2i} \log \operatorname{nat} \frac{1+ix}{1-ix}$$

herleitet (vgl. Fenkner, Bork-Nath, Lieber-von Lühmann, in etwas anderer Form Bardey).

Zur praktischen Berechnung von Logarithmen und von π werden in der Regel noch einige schneller konvergierende Reihen abgeleitet, z. B. für

$$\log \operatorname{nat} \frac{1+x}{1-x}$$

und

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc}\tan\tfrac{1}{2} + \operatorname{arc}\tan\tfrac{1}{3}$$

oder

$$\frac{\pi}{4} = 4\operatorname{arc}\tan\tfrac{1}{5} - \operatorname{arc}\tan\frac{1}{239}.$$

Schließlich sind noch einige Worte über die Stellung der Integralrechnung im Unterricht zu sagen. Sehen wir von den Integralprinzipien ab, die bei der Auswertung von Kurven, Flächen und Körpern in der Planimetrie und Stereometrie zur Anwendung kommen, so beschränkt sich der Mathematikunterricht der offiziellen Lehrpläne auf einige Kegelschnittquadraturen; die Mechanik hat etwa beim Begriff der Arbeit und des Trägheitsmomentes auf das Integral einzugehen. Die Zahl der Stimmen, die (also bei dem durch die Lage der Dinge gebotenen Festhalten an den offiziellen Lehrplänen) Integralrechnung einzuführen wünschen, ist deshalb geringer als bei der Differentialrechnung; Kambly-Langguth, Heilermann-Diekmann tun es nicht.

Die Leitfäden der Infinitesimalrechnung bringen hingegen meistens einen kleinen, oft vom bestimmten Integral ausgehenden Abschnitt, umfangreicher ist das Kapitel bei Lesser und bei Schwab-Lesser, die mit dem unbestimmten Integral beginnen. In der Schule wird man häufig einen Mittelweg einschlagen: man wird vor dem Begriff des bestimmten Integrals nicht zurückschrecken, jedoch die Berechnung von Integralen nicht in der Weise betreiben, wie etwa bei den Differentialquotienten. Die noch offene Kardinalfrage ist eben die, ob die Identität des als Summe definierten und des durch Umkehrung der Differentiation über das unbestimmte Integral hinweg definierten bestimmten Integrals nachgewiesen wird. Damit hängt dann auch wieder, wie gesagt, die Einführung der Differentiale in der Differentialrechnung zusammen. Alles in allem ist die unterrichtliche Behandlung der Integralrechnung und die Eingliederung in den bisherigen Stoffkreis heute noch so sehr im Werden, daß feste Formen sich bisher nicht in dem Maße ausgebildet haben, wie anderwärts.

26. Mathematik in der Reifeprüfung.

Es ist hier nicht der Ort, auf die Bestimmungen über Reifeprüfungen in den verschiedenen Staaten und Schulen einzugehen; ihnen allen ist eine schriftliche und eine mündliche Prüfung, diese mit zulässiger Befreiung der besseren Schüler, gemeinsam und ferner, daß diese Prüfungen im Gegensatz beispielsweise zu Frankreich und England von Lehrern der betreffenden Anstalt in Gegenwart eines staatlichen Kommissars abgehalten werden. Die mündliche Prüfung schließt sich deshalb naturgemäß eng an das im Unterricht Behandelte an. Die schriftliche Prüfung besteht in der Lösung einer Anzahl (etwa wie in Preußen 4) Aufgaben, die unter ständiger Aufsicht und ohne Benutzung anderer Hilfsmittel als der Logarithmentafel in vorgeschriebener Zeit (in Preußen

z. B. 5 Stunden) anzufertigen sind. An die Stelle einzelner Aufgaben treten zuweilen auch zusammenhängende Darstellungen irgendeines Kapitels aus dem Lehrstoff. Die gestellten Aufgaben werden meistenteils – in Preußen stets, doch z. B. nicht in Baden – in den jährlich erscheinenden Schulnachrichten (Programmen) der einzelnen Anstalten veröffentlicht. Sie in derselben Weise, wie das etwa in Frankreich geschieht, in den Schulzeitschriften zusammenzustellen, liegt kein Anlaß vor. Immerhin gibt es eine Anzahl von Sammlungen, die nur, oder doch fast nur aus Aufgaben bestehen, die in Reifeprüfungen gestellt sind. Die bekannteste unter ihnen ist die Sammlung von H. C. E. Martus, die fast ausschließlich preußische höhere Schulen berücksichtigt. Sie wird, wie die hohe Auflagenzahl der beiden ersten Teile zeigt, sehr viel von Lehrern benutzt, ist übrigens auch in einigen wenigen Anstalten offiziell eingeführt. In der Tat stellen ja diese 3000 meist schwierigeren Aufgaben eine ausgezeichnete Auswahl dar, da sie für die Zwecke der Prüfung von den einzelnen Fachlehrern mit besonderer Sorgfalt aufgestellt sind. Es existiert noch eine ganze Anzahl anderer derartiger Sammlungen, die aber alle nicht die Bedeutung derjenigen von Martus erreicht haben. So hat H. Berkenbusch Aufgaben aus den Abschlußprüfungen der sechsstufigen Anstalten (bes. Realschulen) in Preußen, Waldvogel die „Absolutorial-Aufgaben" an den humanistischen Gymnasien Bayerns seit 1867 veröffentlicht. Neueren Datums sind Zusammenstellungen der Aufgaben aus Baden (von Treutlein) und von den württembergischen Oberrealschulen (Sprenger). Diese württembergischen Oberrealschulen gehen übrigens in der darstellenden Geometrie, der Differential- und Integralrechnung, der analytischen Geometrie des Raumes sehr viel weiter, als man das in Norddeutschland gewohnt ist. — Über die Reifeprüfungsaufgaben einer einzelnen, gleichfalls Differential- und Integralrechnung treibenden Anstalt, der Oberrealschule in Breslau, berichtet ein Büchlein von Gutsche. Weiteres Material ist in zahlreichen Zusammenstellungen in Programmabhandlungen zerstreut.

Wenn man aus diesen Büchern einen Schluß auf die Stoffauswahl in den Schulen ziehen will, so ist dabei zu beachten, daß das in den Büchern benutzte Material zeitlich zum Teil recht weit zurückliegt und daß Reformen in der Stoffwahl sich erst verhältnismäßig spät unter den Aufgaben bei den Abgangsprüfungen bemerkbar machen werden. Wegen dieser zwiefachen Phasenverschiebung werden diese Bücher also nicht in der Lage sein, Auskunft über neuere Bestrebungen im Unterricht zu geben. Wenn man jedoch diese Einschränkung in Rechnung zieht, so sind diese Aufgabensammlungen noch am besten geeignet, dem allgemeinen Publikum ein Bild von den wirklich in den Schulen erzielten Resultaten zu geben. Immerhin ist das Bild ein einseitiges, es kommt hier nur die Fähigkeit der Schüler im Lösen von Aufgaben, noch dazu unter einschränkenden äußeren Bedingungen, zum Ausdruck.

Es wird überhaupt sehr schwer sein, sich vollkommen verläßlich über das in Wahrheit in der Schule Erreichte zu unterrichten. Jedenfalls fällt bei der Feststellung solcher auf die Gesamtschule bezogenen Durchschnittsresultate, sei es nun für den Abschluß der Schule oder für irgendeine beliebige Klassenstufe, immer ein Element ganz aus der Rechnung heraus – und doch ist es vielleicht das wichtigste – die Persönlichkeit des Lehrers. Wie der Lehrer zu seinen Schülern, zu seiner Wissenschaft steht, ob er wirklich oder nur dem Namen nach Lehrer ist, das ist zumal bei der freiheitlichen Auffassung, die über unsere Lehrpläne gestattet ist, und bei der Unmöglichkeit, methodische Unterrichtsweise in Paragraphen zu fassen, das in erster Linie Ausschlaggebende.

Literaturverzeichnis.

Vorbemerkung.

Aufgenommen in diese Liste wurden nur Schulbücher; diejenigen, die der Berichterstatter nicht für die vorstehende Arbeit einsehen konnte, sind mit einem* gekennzeichnet. Es ist durchaus nicht Vollständigkeit angestrebt, vielmehr sind mit wenigen Ausnahmen nur solche Bücher angeführt, die in dem Berichte erwähnt wurden.

A. Adler, Fünfstellige Logarithmen. Leipzig. (Göschen.) 1909.

I. Alexandroff, Aufgaben aus der niederen Geometrie. Leipzig. (Teubner.) 1903.

Th. Albrecht, siehe Bremiker.

G. Arendt, Géométrie dans L'Espace. Berlin. (F. A. Herbig.) 1878.

– Trigonométrie rectiligne. Ebenda 1876.

E. F. August, Vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln. 27. A. Leipzig. (Veit u. Co.) 1905.

O. Baer, Éléments de la Géométrie plane. Berlin. (G. Reimer.) 1887.

– Éléments d'Algèbre. Ebenda. 1885.

H. Bach siehe Clasen.

Bahnson, Leitfaden für den Unterricht in der Geometrie. 1. Teil. 4. A. Hamburg. (Rudolphi.) 1887.

R. Baltzer, Die Elemente der Mathematik. 1. Bd.: Arithmetik und Algebra. 7. A. 1885. 2. Bd.: Planimetrie, Stereometrie, Trigonometrie. 6. A. 1883. Leipzig. (S. Hirzel.)

E. Bardeys Aufgabensammlung. Neue Ausg. bearb. von F. Pietzker und O. Presler. 6. A. Leipzig. (Teubner.) 1908.

– – Neue Ausg. für bayersche Mittelschulen; bearb. von J. Lengauer. 2. Aufl. 1909. Ebenda.

– Arithmetische Aufgaben nebst Lehrbuch der Arithmetik. Neue Ausg., bearb. von F. Pietzker und O. Presler. 3. Aufl. 1906. Ebenda.

– – Bearb. von H. Hartenstein. 1. Teil. 8. A. 1909. 2. Teil. 1907. Ebenda.

I. K. Becker, Die Elemente der Geometrie auf neuer Grundlage streng deduktiv dargestellt. 1. Teil. Berlin. (Weidmann.) 1877.

F. Behl, Die Darstellung der Planimetrie nach induktiver Methode. Hildesheim. (Lax.) 1886.

O. Behrendsen und E. Götting, Lehrbuch der Mathematik nach modernen Grundsätzen. A. Unterstufe. Leipzig. (Teubner.) 1909.

– – Ausg. f. höhere Mädchenlehranstalten. Ebenda. 1909.

H. Bensemann, Lehrbuch der ebenen Geometrie. Dessau. (P. Baumann.) 1892.

H. Berkenbusch, Mathematisches Übungsbuch. Aufgaben aus den Abgangsprüfungen sechsstufiger höherer Lehranstalten. Berlin. (L. Simion.) 1902.

H. Bertram, siehe Hirsch.

Chr. Beyel, Darstellende Geometrie. Leipzig. (Teubner.) 1901.

B. Biel, Mathematische Aufgaben. Ausg. f. Gymnasien. 1. Teil. 1903. 2. Teil. 1907. Leipzig. (G. Freytag.)

A. Bode, siehe Schellbach.

R. Böger, Elemente der Geometrie der Lage. Leipzig. (Göschen.) 1900.

A. Böhmes Rechenbücher. Neubearbeitung durch K. Schäffer und G. Weidenhammer. Bielefeld. (Velhagen u. Klasing.) 1905*.

H. Bork, Mathematische Hauptsätze. Herausgegeben von M. Nath. Ausg. f. Realgymnasien und Oberrealschulen. 1. Teil. 5. A. 1907; 2. Teil. I. Abt. 2. A. 1904. II. Abt. (von W. Gercken). 1903. Leipzig. (Dürr.)

H. Bork, P. Crantz und E. Häntzschel, Mathematischer Leitfaden für Realschulen. 1. Teil: Planimetrie und Arithmetik. 5. A. 1906. 2. Teil: Trigonometrie und Stereometrie. 4. A. 1908. Leipzig. (Dürr.)
H. Börner, Lehrbuch zur Einführung in die Geometrie. Leipzig. (Teubner.) 1879.
E. F. Borth, Die geometrischen Konstruktionsaufgaben. 13. A. Leipzig. (O. R. Reisland.) 1904.
A. Böttger, Die Stereometrie. Für den Unterricht an den Realschulen. 3. A. Leipzig. (Dürr.) 1908.
– Die ebene Geometrie. 2. A. Ebenda. 1899.
J. R. Boymann, Lehrbuch der Mathematik. Bearb. von Vering. 1. Teil: Geometrie der Ebene. 25. A. 1907. 2. Teil: Ebene Trigonometrie und Geometrie des Raumes. 17. A. 1907. 3. Teil. Arithmetik. 11. A. 1904. Düsseldorf. (L. Schwann.)
Bremikers Logarithmisch-trigonometrische Tafeln mit sechs Dezimalen. Neubearb. von Th. Albrecht. 12. A. Berlin. (Nicolai.) 1895.
– Logarithmisch-trigonometrische Tafeln mit 5 Dezimalstellen. Berlin. (Weidmann.) 9. A. 1903.
– siehe auch von Vega.
F. I. Brockmann, Versuch einer Methodik zur Lösung planimetrischer Konstruktionsaufgaben. Leipzig. (Teubner.) 1889.
– Materialien zu Dreieckskonstruktionen. Ebenda. 1888.*
– Planimetrische Konstruktionsaufgaben. Ebenda. 1889.*
O. Th. Bürklen, Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie der Ebene. Leipzig. (Göschen.) 1905.
F. Busch, siehe Féaux.
F. Bußler, Die Elemente der Mathematik. Ausg. f. Realschulen. Dresden. (L. Ehlermann.) 1902.
– Mathematisches Übungsbuch. 1. Teil. 5. A. 1903. 2. Teil. 4. A. 1904. Ebenda.
R. Clasen und H. Bach, Aufgabensammlung im Anschluß an Herchers Lehrbuch der Geometrie. Heft 1–3. Leipzig. (P. List.) 1902.
F. Conradt, Lehrbuch der ebenen Trigonometrie. Leipzig. (Teubner.) 1889.
P. Crantz, Arithmetik und Algebra zum Selbstunterricht. (Aus Natur und Geisteswelt Bd. 120 u. 205). 1. Teil. 1906. 2. Teil. 1908. Leipzig. (Teubner.)
– Lehrbuch der Mathematik für höhere Mädchenschulen und Lyzeen. 1. Teil: Für höhere Mädchenschulen. 2. Teil: Für Lyzeen. Ebenda 1909.
– siehe auch Bork.
L. Cremona-M. Curtze, Elemente des graphischen Calculs. Leipzig. (Quandt u. Händel.) 1875.*
M. Curtze, siehe Cremona.
G. Degenhardt, Praktische Geometrie auf den Gymnasien. Frankfurt a. M. (F. B. Auffahrt.) 1898.
P. Dekker. siehe Niemöller.
F. Dicknether, Leitfaden der darstellenden Geometrie. München. (J. Lindauer.) 1899.
J. Diekmann, Anwendung der Determinanten und Elemente der neueren Algebra auf dem Gebiete der niederen Mathematik. Leipzig. (Teubner.) 1881.
– Übungen und Aufgaben für propädeutischen Unterricht in Geometrie. 1. Teil: Vorübungen zur Euklidischen Geometrie. 1886. 2. Teil: Vorübungen zur synthetischen Geometrie. 1887. Breslau. (Hirt.)
– siehe auch Heilermann, Koppe.
H. Dobriner, Leitfaden der Geometrie für höhere Lehranstalten. Leipzig. (Voigtländer.) 1898.
H. Dreßler, Die Lehre von den Funktionen. Leipzig. (Dürr.) 1908.
A. Dronke, Die Kegelschnitte in synthetischer Behandlungsweise. Leipzig. (Teubner). 1881.
J. Druxes, siehe Heis.

K. Düsing, Die Elemente der Differential- und Integralrechnung in geometrischer Methode. Hannover. (M. Jänecke.) 1908.
W. Eggers, Lehrbuch des Projektionszeichnens. 3. A. Leipzig. (Seemann u. Co.) 1905.
– Lehrbuch der darstellenden Geometrie. 1. Teil: Die Elemente. 2. A. 1900. 2. Teil: Durchschnitte und Durchdringungen der Körper. 1900. Ebenda.
– W. Eichhorn, Arithmetisches Regelheft. 4 Hefte. Leipzig. (Teubner.) 1900.
A. Emmerich, Der Koordinatenbegriff und einige Grundlehren von Kegelschnitten. Essen. (G. D. Baedeker.) 1893.
W. Erler, Einleitung in die analytische Geometrie und in die Lehre von den Kegelschnitten. 2. A. Berlin. (F. Dümmler.) 1893.
– Die Elemente der Kegelschnitte in synthetischer Behandlung. 6. A. von L. Hübner. Leipzig. (Teubner.) 1903.
B. Féaux, Buchstabenrechnung und Algebra. 10. A. von F. Busch. Paderborn. (F. Schöningh.) 1903.
– Lehrbuch der elementaren Planimetrie. 9. A. von F. Busch. Ebenda. 1904.
– Ebene Trigonometrie und elementare Stereometrie. 7. A. von F. Busch. Ebenda. 1898.
A. Feld und V. Serf, Leitfaden für den geometrischen Unterricht. 5. A. Wiesbaden. (C. G. Kunze.) 1907.
H. Fenkner, Lehrbuch der Geometrie. 1. Teil: Ebene Geometrie 5. A. 1906. 2. Teil: Raumgeometrie. 3. A. 1904. 3. Teil: Ebene Trigonometrie. 1908. Berlin. (O. Salle.)
– Arithmetische Aufgaben. Ausg. A. Teil 1. 6. A. 1909. Teil 2. 3. A. 1905. Teil 3. 2. A. 1907. Berlin. (O. Salle.)
K. Fink, Die elementare systematische und darstellende Geometrie der Ebene. 1. u. 2. Kurs 1896. 3. u. 4. Kurs 1897. Tübingen. (H. Laupp.)
R. von Fischer-Benzon, siehe Petersen.
E. Fischer, siehe Schellbach.
M. Focke und M. Kraß, Lehrbuch der Geometrie. 1. Teil: Planimetrie 15. A. 1906. 2. Teil: Stereometrie 9. A. 1906. Münster (Westf.) (Coppenrath.)
– Lehrbuch der ebenen Trigonometrie. 10. A. Ebenda. 1906.
– Leitfaden zur Einführung in die Stereometrie und Trigonometrie. 3. A. Ebenda. 1899.
R. Franz, siehe Uth.
J. Frischauf, Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik. 4. A. Graz. (Leuschner & Lubensky.) 1881.
– Elemente der Geometrie. 2. A. Leipzig. (Teubner.) 1877.
W. Fuhrmann, Analytische Geometrie der Kegelschnitte. Berlin. (Winkelmann & Söhne.) 1884.
– Einleitung in die neuere Geometrie. Leipzig. (Teubner.) 1881.
H. Funke, Methodisch geordnete Aufgaben. Berlin. (G. Reimer.) 1896.
W. Gallenkamp, Die Elemente der Mathematik. 1. Teil. 2 Hefte. (Arithmetik und Algebra 1. Abt.; Planimetrie.) 5. A. (Jahr nicht angegeben). 2. Teil. (Arithmetik und Algebra 2. Abt.; Stereometrie und Trigonometrie.) 4. A. 1879. 3. Teil. (Algebraische Analysis. Einleitung in die höhere Analysis. Analytische Geometrie.) 2. A. 1880. 4. Teil. (Synthetische Geometrie. 1. Abt. Die Kegelschnitte in elementar-synthetischer Behandlung. 2. Abt. Die Linien und Flächen zweiter Ordnung nach den Methoden der Geometrie der Lage.) 1880. Iserlohn. (J. Baedeker.)
– Sammlung trigonometrischer Aufgaben. 2. A. Berlin. (Plahn.) 1878.
J. O. Gandtner, Elemente der analytischen Geometrie. 13. A. Berlin. (Weidmann.) 1907.
J. O. Gandtner und K. F. Junghans, Sammlung von Lehrsätzen und Aufgaben aus der Planimetrie. 1. Teil. 4. A. 1879. 2. Teil. 3. A. 1882. Berlin. (Weidmann.)
H. Ganter und F. Rudio, Die analytische Geometrie der Ebene. 6. A. Leipzig. (Teubner.) 1906.
F. G. Gauß, Fünfstellige vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Halle. (Strien.) 88.–91. A. 1906.
– Kleine Ausgabe. 17.–20. A. Ebenda. 1904.
– Vierstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Ebenda. 1900.

W. Gercken, Grundzüge der darstellenden Geometrie. Leipzig. (Dürr.) 1903.
A. Gille, Lehrbuch der Geometrie. 1. Teil: Ebene Geometrie. 2. Teil: Trigonometrie und Stereometrie. Halle a. S. (Waisenhaus.) 1895.
E. Götting, siehe Behrendsen.
H. Graßmann, Lehrbuch der Mathematik für höhere Lehranstalten. 1. Teil: Lehrbuch der Arithmetik 1861. 2. Teil: Lehrbuch der Trigonometrie. 1865. Berlin. (A. Enslin.)
A. Greve, Fünfstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln. 14. A. Bielefeld. (Velhagen & Klasing.) 1909.
H. Grünbaum, Lehr- und Übungsbuch der Differential-Rechnung. Würzburg. (J. Frank.) 1901.
F. Günther und F. Boehm, Rechenbuch für höhere Lehranstalten. 9. A. Berlin. (H. W. Müller.) 1906.
O. Gutsche, Mathematische Übungsaufgaben. Leipzig. (Teubner.) 1905.
F. Haacke, Entwurf eines arithmetischen Lehrganges für höhere Schulen. Leipzig. (Teubner.) 1904.
E. Haentzschel, siehe Bork.
Haller von Hallerstein, Lehrbuch der Elementar-Mathematik. Nach dem Lehrplan für das Königl. Preußische Kadetten-Korps bearb. von B. Hülsen. 1. Teil: 7. A. 1903. 2. Teil: 4. A. 1901. 3. Teil: 4. A. 1902. Berlin. (Nauck & Co.)
– Lehrbuch der Elementar-Mathematik (für die Portepeefähnrichsprüfung usw.). 11. A. bearb. von B. Hülsen. 1. Teil: Arithmetik. 2. Teil: Geometrie. Ebenda. 1906.
E. Hammer, Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Stuttgart. (Metzler.) 1885. 2. A. 1898.
O. Handel, Elementar-synthetische Kegelschnittlehre. 3. A. Berlin. (Weidmann.) 1906.
Chr. Harms und A. Kallius, Rechenbuch. 24. A. Oldenburg. (G. Stalling.) 1908.
H. Hartenstein, siehe Bardey.
G. Hauck und F. Kommerell, Lehrbuch der Stereometrie. 9. A. von V. Kommerell. Tübingen. (H. Laupp.) 1905.
R. Heger, Leitfaden für den geometrischen Unterricht. 1. Teil: Planimetrie. 1882. 2. Teil: Trigonometrie. 1882. 3. Teil: Stereometrie. 1883. 4. Teil: Analytische Geometrie der Ebene. 1883. Breslau. (Trewendt.)
Heilermann-Diekmanns Lehr- und Übungsbuch für den Unterricht in der Algebra. 1. Teil. 13. A. von K. Knops. 1909. 2. Teil. 6. A. von K. Knops. 1907. Essen. (G. D. Baedeker.)
– siehe auch Knops.
K. Heinze, Genetische Stereometrie. Bearb. von F. Lucke. Leipzig. (Teubner.) 1886.
E. Heis, Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra. 97. u. 98. A. Köln. (M. Du Mont-Schauberg.) 1898. 112. A. von J. Druxes. 2 Teile. Ebenda. 1908.
– siehe auch Matthiessen.
J. Helmes, Die Elementar-Mathematik. 1. Teil: Die Arithmetik und Algebra. I. Abteil. 2. A. 1873. II. Abteil. 2. A. 1874. 2. Teil: Die Planimetrie. I. Abteil. 2. A. 1874. II. Abteil. 2. A. 1876. 3. Bd.: Die ebene Trigonometrie. 2. A. 1881. 4. Bd.: Die Stereometrie und sphärische Trigonometrie. 2. A. 1896. Hannover. (Hahn.)
J. Henrici und P. Treutlein, Lehrbuch der Elementar-Geometrie. 1. Teil. 3. A. 1897. 2. Teil. 3. A. 1907. 3. Teil. 2. A. 1901. Leipzig. (Teubner.)
G. Hessenberg, Ebene und sphärische Trigonometrie. Leipzig. (Göschen.) 1901.
Meier Hirsch, Sammlung von Beispielen, Formeln und Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra. 20. A. von H. Bertram. Altenburg. (Pierer.) 1890.
F. Hochheim, Leitfaden für den Unterricht in der Arithmetik und Algebra. Heft I. 6. A. von F. Hochheim. 1900. Heft II. 2. A. 1884. Berlin. (Mittler.)

G. Hoffmann, Anleitung zur Lösung planimetrischer Aufgaben. 5. A. Leipzig. (O. R. Reisland.) 1903.
F. Hofmann, Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra. 1. Teil. 9. A. 1890. 2. Teil. 10. A. 1902. 3. Teil. 5. A. 1892. Bayreuth. (Grau.)
A. Holtze, siehe Köstler.
G. Holzmüller, Vorbereitende Einführung in die Raumlehre. Leipzig. (Teubner.) 1904.
— Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik. 1. Teil. 4. A. 1904. 2. Teil. 2. A. 1897. 3. Teil. 2. A. 1903. Ebenda.
— Einführung in das stereometrische Zeichnen. Ebenda. 1886.*
L. Hübner, siehe Erler.
B. Hülsen, siehe Haller von Hallerstein.
A. Hupe, siehe Heinr. Müller.
K. F. Junghans, Lehrbuch der ebenen Geometrie. 2 Teile. Berlin. (Weidmann.) 1879.
— siehe auch Gandtner.
L. Kambly, Die Elementarmathematik. 2. Teil: Planimetrie. 75.—81. A. Breslau. (Hirt.) 1886.
Kambly-Langguth, Arithmetik und Algebra. Ausg. B. Bearb. von A. Thaer. 39. A. Breslau. (Hirt.) 1908.
Kambly-Roeder, Planimetrie. Ausg. B. 23.—26. A. Ebenda. 1906.
— Trigonometrie. Ausg. B. 6. A. Ebenda. 1906.
— Stereometrie und sphärische Trigonometrie. 32. A. bearbeitet von A. Thaer. Ebenda. 1909.
K. Knops und E. Meyer, Lehr- und Übungsbuch für den Unterricht in der Mathematik an den höheren Mädchenschulen, Lyzeen und Studienanstalten. Bearb. nach Heilermann-Diekmanns Algebra und Koppe-Diekmanns Geometrie. Bisher erschien Heft 1 bis 4. Essen. (Baedeker.) 1909.
— siehe auch Heilermann, Koppe.
Koppe und Diekmanns Geometrie zum Gebrauche an höheren Unterrichtsanstalten. Ausg. für Realanstalten. Neue Bearbeitung von K. Knops. 1. Teil. 24. A. 1908. 2. Teil. 20. A. 1908. 3. Teil. 3. A. 1907. Essen. (Baedeker.)
— siehe auch Knops.
H. Köstler, Vorschule der Geometrie. 9. und 10. A. Halle a. S. (L. Nebert.)*
H. Köstler und A. Holtze, Leitfaden der ebenen Geometrie. 1. Heft: Kongruenz. 6. A. 1906. 2. Heft: Lehre vom Flächeninhalt. 4. A. 1905. 3. Heft: Ähnlichkeitslehre. 4. A. 1906. Ebenda.
E. Kretschmer, Geometrische Anschauungslehre. Posen. (J. Jolowicz.) 1877.
— Elemente der Stereometrie. Als Manuskript gedruckt. Posen. (E. Rehfeld.) 1882.
— siehe auch Thieme.
R. Kreuschmer, siehe Lackemann.
W. Krimphoff, siehe Schwering.
F. Kruse, Elemente der Geometrie. Berlin. (Weidmann.) 1875.*
M. Kutnewsky, siehe Heinr. Müller.
C. Lackemann, Die Elemente der Geometrie. 2 Teile. Bearb. von Kreuschmer. 1. Teil. 8. A. 1906. 2. Teil. 5. A. 1906. Breslau. (Hirt.)
— Die Elemente der Arithmetik. 4. A. Bearb. von Kreuschmer. Breslau. (Hirt.) 1905.
J. Lange, Synthetische Geometrie der Kegelschnitte. 3. A. von P. Zühlke. Berlin. (H. W. Müller.) 1908.
H. Langguth, siehe Kambly.
A. Lanner, Neuere Darstellungen der Grundprobleme der reinen Mathematik. Berlin. (O. Salle.) 1907.
H. Leitzmann, siehe Matthias.
H. Lemkes, siehe Schellen.

J. Lengauer, Die Grundlehren der ebenen Geometrie. 6. A. Kempten. (J. Kösel.) 1899.
– Die Grundlehren der Stereometrie. Ebenda. 1896.
– Die Grundlehren der ebenen Trigonometrie. 2. A. Ebenda. 1901.
– siehe auch Bardey.
O. Lesser, Die Infinitesimalrechnung im Unterrichte der Prima. Berlin. (O. Salle.) 1906.
– Einführung in den geometrischen Unterricht. Dortmund. (Köppen.) 1898.
– Hilfsbuch für den geometrischen Unterricht. Berlin. (O. Salle.) 1902.
– siehe auch Schwab.
H. Lieber und von Lühmann, Geometrische Konstruktionsaufgaben. 13. A. Berlin. (Simion.) 1908.
– Leitfaden der Elementar-Mathematik. Neu bearb. von C. Müsebeck. 1. Teil: Planimetrie. Ausg. A. 23. A. 1909. Ausg. B. 4. A. 1906. 2. Teil. Ausg. A. 10. A. 1907. 3. Teil. 14. A. 1909. Berlin. (Simion.)
F. Lucke, siehe Heinze.
F. von Lühmann, siehe Lieber.
E. Lutz, Analytische Geometrie der Ebene. Karlsruhe i. B. (G. Braun.) 1909.
W. Madel, Die wichtigsten Dreiecksaufgaben aus der ebenen Trigonometrie. Berlin. (M. Rüger.) 1892.
G. Mahler, Ebene Geometrie. 4. A. Leipzig. (Göschen.) 1905.
A. Mahlert, siehe Heinr. Müller.
P. Mansion, Einleitung in die Theorie der Determinanten. Aus d. 3. franz. Aufl. übersetzt. Leipzig. (Teubner.) 1899.
P. Martin und O. Schmidt, Raumlehre. Heft 1. 3. A. 1896. Heft 2. 3. A. 1897. Heft 3. 2. A. 1898. Dessau. (R. Kahle.)
H. C. E. Martus, Astronomische Erdkunde. Ein Lehrbuch angewandter Mathematik. Kleine Ausgabe. 2. A. Dresden u. Leipzig. (Koch.) 1902.
– Mathematische Aufgaben. 1. Teil: Aufgaben. 11. A. 1903. 2. Teil: Ergebnisse. 11. A. 1903. 3. Teil: Aufgaben. 2. A. 1904. 4. Teil: Ergebnisse. 2. A. 1906. Ebenda.
– Raumlehre für höhere Schulen. 2 Teile. 1890/92. Bielefeld. (Velhagen und Klasing.)
– Leitfaden für den Unterricht in der Raumlehre. 2 Teile. 1893. Ebenda.
J. A. Matthias, Leitfaden für einen heuristischen Schulunterricht. 12. A. Bearb. von H. Leitzmann. Magdeburg. (Heinrichshofen.) 1883.
L. Matthiessen, Übungsbuch für den Unterricht in der Arithmetik und Algebra. Nach der Aufgabensammlung von Heis für Realschulen usw. 6. A. Köln. (Du Mont-Schauberg.) 1905.
F. G. Mehler, Hauptsätze der Elementar-Mathematik. Neubearb. von A. Schulte-Tigges. Ausg. A. 25. A. des Stammbuches. Berlin. (Reimer.) 1908.
F. G. Mehler – A. Schulte-Tigges, Hauptsätze der Elementar-Mathematik. Ausg. B. Unterstufe: Planimetrie und Arithmetik. 1908. Oberstufe. 1. Teil: Synthetische Geometrie der Kegelschnitte. Berlin. (Reimer.) 1907.
R. Menge und F. Werneburg, Antike Rechenaufgaben. Leipzig. (Teubner.) 1881.
E. Meyer, siehe Knops.
F. Meyer, Elemente der Arithmetik und Algebra. 2. A. Halle a. S. (H. W. Schmidt.) 1885.
A. Milinowski, Die Geometrie für Gymnasien und Realschulen. 1. Teil: Planimetrie. 2. Teil: Stereometrie. 2 Hefte. Leipzig. (Teubner.) 1881.
– Elementar – synthetische Geometrie der gleichseitigen Hyperbel. Leipzig. (Teubner.) 1883.
Mink, Lehrbuch der Geometrie. Gotha. (Ackermann.) 1908.
A. Much, siehe Reidt.
C. H. Müller und O. Presler, Leitfaden der Projektionslehre. Ausg. A. Leipzig. (Teubner.) 1903.

E. R. Müller, Planimetrische Konstruktionsaufgaben. 5. A. Oldenburg. (G. Stalling.) 1903.
– Vierstellige logarithmische Tafeln. Stuttgart. (J. Maier.) 1892.
Heinrich Müller, Die Mathematik auf den Gymnasien und Realschulen. Ausg. A. Für Gymnasien und Progymnasien. 2 Teile. 1. Teil: Die Unterstufe. 4. A. Leipzig. (Teubner.) 1907.
– – 2. Teil: Die Oberstufe. 3. A. Ebenda. 1909.
– – Ausg. B. Für reale Anstalten und Reformschulen. 2 Teile. 1. Teil: Die Unterstufe. 5. A. Ebenda. 1907.
– – 2. Teil: Die Oberstufe. Unter Mitwirkung von A. Hupe. 2 Abteilungen. Abt. 1. Planimetrie, Algebra, Trigonometrie und Stereometrie. 3. A. Ebenda. 1907.
– – Abt. 2. Geometrie der Kegelschnitte. Darstellende Geometrie. 3. A. Ebenda. 1909.
– – Ausg. für bayerische Lehranstalten. Herausgegeben von M. Zwerger. 2 Teile. Ebenda. 1906.*
– Aufgaben zu planimetrischen Konstruktionen und graphischen Darstellungen. Ebenda. 1909.
– und M. Kutnewsky, Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik, Trigonometrie und Stereometrie. Ausg. A. Teil I. 5. A. 1909. Teil II. 3. A. 1909. Ebenda.
– – Ausg. B. Teil I. 4. A. 1906. Teil II. 2. A. 1907. Ebenda.
– – Ausg. für bayerische Lehranstalten. Hrsg. v. M. Zwerger. 1906. Ebenda.
– und A. Mahlert, Mathematisches Lehr- und Übungsbuch für höhere Mädchenschulen. Teil I: Arithmetik und Algebra. Teil II: Planimetrie und Körperberechnungen. 2. A. Leipzig. (Teubner.) 1909.
– – für das Lyzeum. Teil I: Arithmetik und Algebra. Teil II: Planimetrie, Trigonometrie und Stereometrie. Ebenda. 1909.*
– – für Studienanstalten. Ausg. A. Für gymnasiale Kurse. Arithmetik und Algebra. Teil I. Ebenda. 1909. Geometrie. Teil I. Ebenda. 1909.*
– – Ausg. B. Für Oberrealschul- und realgymnasiale Kurse. Arithmetik und Algebra. Teil I. Geometrie. Teil I. Ebenda. 1909.
– und F. Pietzker, Rechenbuch für die unteren Klassen der höheren Lehranstalten. Ausg. A. 3. A. Ebenda. 1906.
– und A. Witting, Lehrbuch der Mathematik für die oberen Klassen der höheren Lehranstalten. Ebenda. 1907.
Hubert Müller, Leitfaden der ebenen Geometrie. 1. Teil. 1. Heft. Die geradlinigen Figuren und der Kreis. 3. A. 1899. 2. Heft. Anhang. Erweiterung zu Teil 1 und Einleitung in die neuere Geometrie. 2. A. 1878. 2. Teil: Die Kegelschnitte und die Elemente der neueren Geometrie. 1875. Leipzig. (Teubner.)
– Die Elemente der Planimetrie. 7. A. Metz. (G. Scriba.) 1899.
– Die Elemente der ebenen Trigonometrie. 5. A. Ebenda. 1905.
– Die Elemente der Stereometrie. 4. A. Ebenda. 1908.
I. H. T. Müller, Vierstellige Logarithmen der natürlichen Zahlen und Winkelfunktionen. Halle. (Waisenhaus.) 2. A. 1861.*
C. Müsebeck, siehe Lieber.
C. Musmacher, Leitfaden und Aufgabensammlung für den propädeutischen geometrischen Unterricht. Leipzig. (Renger.) 1903.*
M. Nath, siehe Bork.
K. W. Neumann, Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik und Algebra. 7. A. Leipzig. (Heinsius.) 1899.
F. Niemöller und P. Dekker, Arithmetisches und algebraisches Unterrichtsbuch. 4 Hefte. Breslau. (Hirt.) 1899–1904.
G. Noodt, Mathematische Unterrichtsbücher für höhere Mädchenschulen. Bisher sind erschienen: Übungsbuch zur Arithmetik und Algebra. 1908. Leitfaden der ebenen Geometrie. 1. Teil. 1909. 2. Teil. 1909. Bielefeld. (Velhagen u. Klasing.)

J. J. Oppel, Leitfaden für den geometrischen Unterricht an Gymnasien und ähnlichen Lehranstalten. 2. A. Frankfurt a. M. (Winter.) 1879.
F. Otto und P. Siemon, Lehr- und Übungsbuch der Arithmetik und Algebra für höhere Mädchenschulen. Leipzig. (Hirt.) 1907.
F. Pahl, siehe Schulze.
J. Petersen, Lehrbuch der elementaren Planimetrie. 2. A. 1891. Lehrbuch der Stereometrie 1885. Die ebene Trigonometrie und die sphärischen Grundformeln 1885. Deutsch von R. von Fischer-Benzon. Kopenhagen. (A.F.Höst u.Söhne.) 1891.
– Methoden und Theorien zur Auflösung geometrischer Konstruktionsaufgaben. Deutsch von R. von Fischer-Benzon. Ebenda. 1879.
W. Pflieger, Elemente der Arithmetik. Straßburg. (F. Bull.) 1896.
F. Pietzker, Lehrgang der Elementar-Mathematik. Teil 1. Unterstufe 1906. Teil 2. Oberstufe 1908. Teil 3. Kegelschnittlehre 1908. Leipzig. (Teubner.)
– siehe auch Bardey, Heinrich Müller.
O. Rausenberger, Die Elementargeometrie des Punktes, der Geraden und der Ebene. Leipzig. (Teubner.) 1887.
E. Rehfeld, Leitfaden für die propädeutischen Kurse in Stereometrie und Trigonometrie an Realanstalten. Berlin. (Reuther und Reichard.) 1902.
F. Reidt, Vorschule der Theorie der Determinanten. Leipzig. (Teubner.) 1874.
– Aufgabensammlung zur Arithmetik und Algebra. 8. A. Berlin. (Grote.) 1905.
– Elemente der Mathematik: 1. Teil: Arithmetik und Algebra. 10. A.; 2. Teil: Planimetrie. 18. A.; 3. Teil: Stereometrie. 12. A.; 4. Teil: Trigonometrie. 14. A. 1908. Ebenda.
– Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Trigonometrie und Stereometrie. I. Trigonometrie. 5. A. Bearb. von H. Thieme. 1907. II. Stereometrie. 4. A. Bearb. von A. Much. 1897. Leipzig. (Teubner.)
Th. Reishaus, Vorschule zur Geometrie. 1. Abt. Lehrbuch. 2. Abt. Wiederholungs- und Aufgabenbuch. Leipzig. (Teubner.) 1879.
A. Reum, Der mathematische Lehrstoff für den Untersekundaner. Essen. (Baedeker.) 1894.
J. Reusch, Planimetrische Konstruktionen in geometrographischer Ausführung. Leipzig. (Teubner.) 1904.
A. Richter, Arithmetische Aufgaben. Leipzig. (Teubner.) 1898.
– Trigonometrische Aufgaben. Ebenda. 1898.
O. Richter, Kreis und Kugel in senkrechter Projektion. Leipzig. (Teubner.) 1908.
– Dreistellige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Ebenda. 1907.
H. Röder, siehe Kambly.
F. Roese, Elementargeometrie. Wismar. (Hinstorff.) 1890.
C. Rohrbach, Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln. 5. A. Gotha. (Thienemann.) 1908.
F. Rudio, siehe Ganter.
F. Rummer, Lehrbuch der Trigonometrie. 2. A. Heidelberg. (J. C. B. Mohr.) 1867.
– Lehrbuch der Elementargeometrie. 2. Teil. 2. A. Ebenda. 1850.
J. Sachs, Leitfaden zum Unterricht in der projektivischen Geometrie. Bremerhaven. (L. von Vangerow.) 1907.
J. Sassenfeld, Hauptsätze der Elementar-Mathematik für das Gymnasium. 2. A. Unterstufe. 1906. Oberstufe. 1906. Trier. (Fr. Lintz.)
P. Sauerbeck, Lehrbuch der Stereometrie. Stuttgart. (A. Bergsträßer.) 1900.
K. Schaeffer, siehe Böhme.
P. Schafheitlin, Synthetische Geometrie der Kegelschnitte. Leipzig. (Teubner.) 1907.
K. H. Schellbach, Mathematische Lehrstunden. Aufgaben aus der Lehre vom Größten und Kleinsten. Bearb. von A. Bode und E. Fischer. Berlin. (Reimer.) 1860.

H. Schellen, Aufgaben zum Gebrauche beim Rechenunterricht. Ausg. A. Bearb. von H. Lemkes. 1. Teil. 30 A. 1902. 2. Teil. 8. A. 1900. Münster. (Coppenrath)*.
E. Schindler, Die Elemente der Planimetrie in ihrer organischen Entwicklung. Berlin. (Springer.) 4 Stufen. 1883.
– Das natürliche System der Elemente der Geometrie, der Normalunterrichtsgegenstand für unsere höheren Schulen. Leipzig. (Dürr.) 1898.
V. Schlegel, System der Raumlehre. 1. Teil: Geometrie. 1872. 2. Teil: Die Elemente der modernen Geometrie und Algebra. 1875. Leipzig. (Teubner.)
– Lehrbuch der elementaren Mathematik. 1. Teil: Arithmetik und Kombinatorik. 1878. 2. Teil: Geometrie 1879. 3. Teil: Trigonometrie. 1880. 4. Teil: Stereometrie und sphärische Trigonometrie. 1880. Wolfenbüttel. (Zwißler.)
O. Schlömilch, Grundzüge einer wissenschaftlichen Darstellung der Geometrie des Maßes. 1. Heft: Planimetrie. 7. A. 1888. 2. Heft: Ebene Trigonometrie. 6. A. 1883. 2. Teil: Geometrie des Raumes. 3. A. 1874. Leipzig. (Teubner.)
– Fünfstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln. 19. A. Braunschweig. (Vieweg.) 1905.
O. Schmidt, siehe Martin.
Chr. Schmehl, Arithmetik und Algebra nebst Aufgabensammlung. Teil I. Teil II. Ausg. A. für die Obersekunda und Prima der Gymnasien. Ausg. B. für die Obersekunda der realistischen Anstalten. Gießen. (Roth.) 1907/08.
– Sammlung von Aufgaben aus der Algebra und algebraischen Analysis. Für die Prima realistischer Anstalten. Ebenda. 1909.
– Die Elemente der darstellenden Geometrie. 2 Teile. Gießen. (Roth.) 1899.
A. Schoenflies, Einführung in die Hauptgesetze der zeichnerischen Darstellungsmethoden. Leipzig. (Teubner.) 1908.
E. Schroeder, Abriß der Arithmetik und Algebra. 1. Heft. Leipzig. (Teubner.) 1874.
R. Schröder, Die Anfangsgründe der Differential- und Integralrechnung. Leipzig. (Teubner.) 1905.
Th. E. Schröder, siehe Wöckel.
H. Schubert, Beispielsammlung zur Arithmetik und Algebra. 3. A. Leipzig. (Göschen.) 1905.
– Vierstellige Tafeln und Gegentafeln. 3. A. Leipzig. (Göschen.) 1908.
– und A. Schumpelick, Arithmetik für Gymnasien. 1. Heft: Für mittlere Klassen. 1907. 2. Heft: Für obere Klassen. 1908. Leipzig. (Göschen.)
A. Schülke, Vierstellige Logarithmentafeln. 6. A. Leipzig. (Teubner.) 1907.
– Aufgabensammlung aus der Arithmetik, Geometrie, Trigonometrie und Stereometrie. 1. Teil. Für die mittleren Klassen. 1906. 2. Teil. Für die oberen Klassen. 1902. Leipzig. (Teubner.)
– Differential- und Integralrechnung im Unterricht. Ebenda. 1907.
W. J. Schüller, Ausführliches Lehrbuch der Arithmetik und Algebra. 2. A. Leipzig. (Teubner.) 1897.
E. Schulze und F. Pahl, Mathematische Aufgaben. Ausgabe für Realgymnasien und Oberrealschulen. 1. Teil. 1908. 2. Teil. 1908. Leipzig. (Dürr.)
A. Schulte-Tigges, Synthetische Geometrie der Kegelschnitte. (F. G. Mehler, Hauptsätze. Ausg. B. Oberstufe. 1. Teil.) Berlin. (Reimer.) 1907.
– siehe auch Mehler.
E. Schumann, Lehrbuch der ebenen Geometrie für die ersten drei Jahre geometrischen Unterrichts. Stuttgart. (Grub.) 1904.
A. Schumpelick, siehe Schubert.
M. Schuster, Geometrische Aufgaben. Ausg. A. für Vollanstalten. 1. Teil: Planimetrie. 2. A. 1903. 2. Teil: Trigonometrie. 1903. 3. Teil: Stereometrie. 2. A. 1908. Leipzig. (Teubner.)
F. Schütte, Anfangsgründe der darstellenden Geometrie für Gymnasien. Leipzig. (Teubner.) 1905.

K. Schwab und O. Lesser, Mathematisches Unterrichtswerk zum Gebrauche an höh. Lehranstalten. Im Sinne der Meraner Lehrpläne bearbeitet. I. Bd. Lehr- und Übungsbuch für den Unterricht in der Arithmetik und Algebra. 1. Teil. (Unterstufe.) 2. A. 1909. 2. Teil. (Ausg. A. Oberstufe.) 1909. Wien u. Leipzig. (Tempsky u. Freytag.)

K. Schwering, Analytische Geometrie. 2. A. Freiburg i. Br. (Herder.) 1904.

– Trigonometrie. 3. A. Ebenda. 1907. Daraus: Anfangsgründe der Trigonometrie 2. A. 1900.

– Stereometrie für höhere Lehranstalten. 3. A. Ebenda. 1909.

– Arithmetik und Algebra für höhere Lehranstalten. 3. A. Ebenda. 1906.

– Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik für höhere Lehranstalten. 2. A. 1. Lehrg. 1902. 2. Lehrg. 1903. 3. Lehrg. 1904. Ebenda.

– und W. Krimphoff, Ebene Geometrie. 6. A. Ebenda. 1908.

H. Seeger, Die Elemente der Geometrie. 3. A. Wismar. (Hinstorff.) 1887.

– Leitfaden für den arithmetischen Unterricht in der Prima einer neunklassigen Realschule. Teil I. Elemente der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung. Teil II. Anwendungen der elementaren Infinitesimalrechnung auf die Mechanik. Wismar. (Hinstorff.) 1894.

H. Servus, Die analytische Geometrie der Ebene. Leipzig. (Teubner.) 1890.*

P. Siemon, siehe Otto.

M. Simon, Die Elemente der Geometrie mit Rücksicht auf die absolute Geometrie. Straßburg. 1890

– Die Elemente der Arithmetik als Vorbereitung auf die Funktionentheorie. Straßburg. (R. Schultz & Co.) 1884.

Th. Spieker, Lehrbuch der ebenen Geometrie. Ausg. A. 30. A. 1908. Ausg. B. 12. A. 1908. Ausg. C. 4. A. 1908. Potsdam. (Stein.)

– Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. 7. A. Ebenda. 1907.

– Lehrbuch der Stereometrie. 5. A. Ebenda. 1907.

– Lehrbuch der Arithmetik und Algebra. 5. A. 1. Teil. 1903. 2. Teil. 1904. Ebenda.

C. Spitz, Lehrbuch der ebenen Geometrie. 10. A. Leipzig. (C. F. Winter.) 1899.

Sprenger, Mathematische Aufgaben aus den Reifeprüfungen der württembergischen Oberrealschulen. 1. Teil. Leipzig. (Quelle u. Meyer.) 1908.*

H. Steckelberg, Die Elemente der Differential- und Integralrechnung. Leipzig. (Teubner.) 1906.

A. Tellkampf, Vorschule der Mathematik. 6. A. Berlin. (Rücker u. Püchler.) 1864.

L. Tesař, Elemente der Differential- und Integralrechnung. Leipzig. (Teubner.) 1906.

A. Thaer, siehe Kambly.

H. Thieme, Leitfaden der Mathematik für Realanstalten. Unterstufe. 2. A. 1905. Oberstufe. 2. A. 1907. Leipzig. (G. Freytag.)

– Sammlung von Lehrsätzen und Aufgaben aus der Stereometrie. Im Anschluß an nachgelassene Papiere des Oberlehrers Dr. Kretschmer. Leipzig. (Teubner.) 1885.

– siehe auch Reidt.

P. Treutlein, Vierstellige logarithmische und goniometrische Tafeln. Braunschweig. (Vieweg.) 1896.

– Mathematische Aufgaben aus den Reifeprüfungen der badischen Mittelschulen. 1. Teil: Aufgaben. 2. Teil: Auflösungen. 1907. Leipzig. (Teubner.)

– siehe auch Henrici.

K. Uth, Planimetrie. 7. A. von R. Franz. Kassel. (E. Hühn.) 1904.

G. von Vega, Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch. Bearb. von C. Bremiker. 78. A. Berlin. (Weidmann.) 1900.

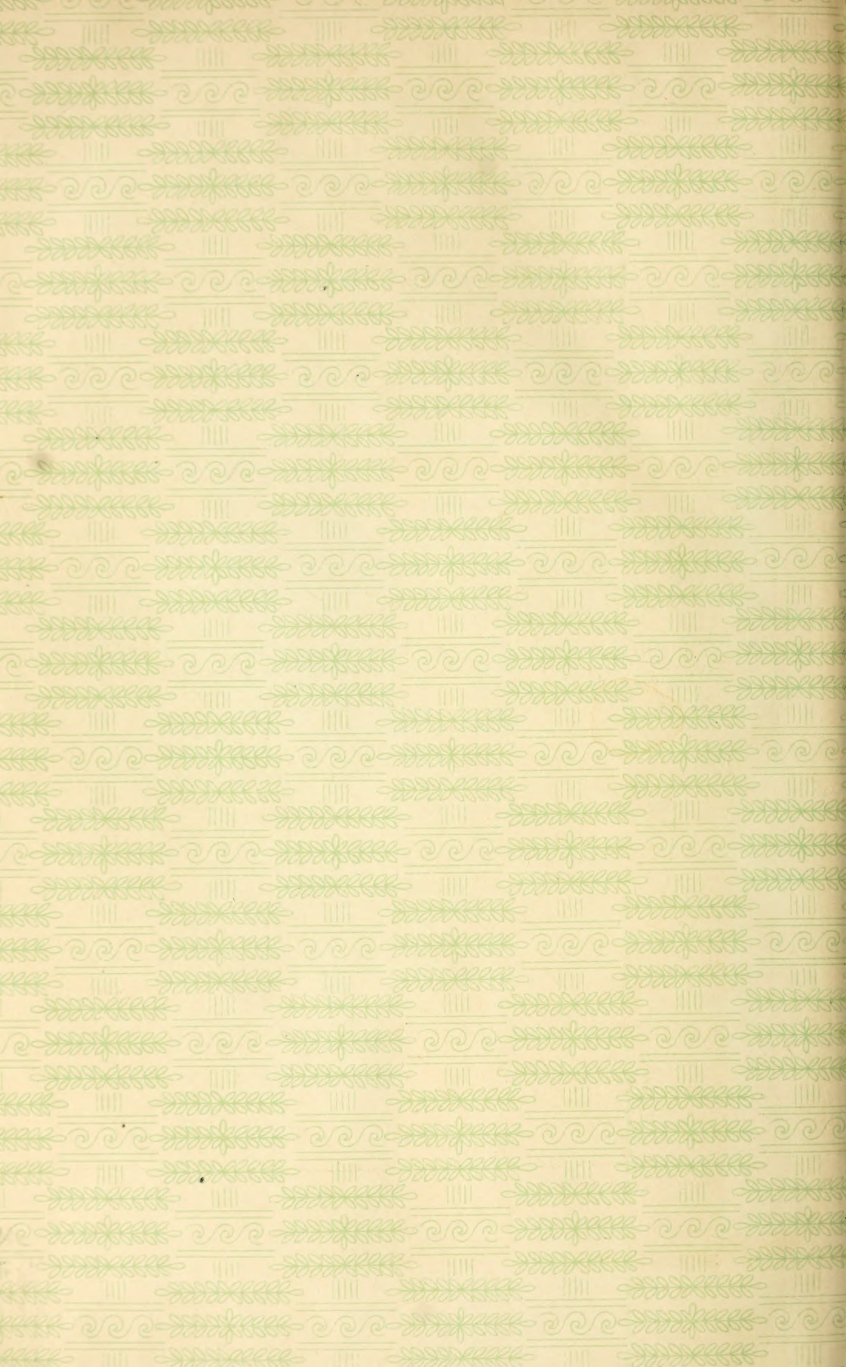
Vering, siehe Boymann.

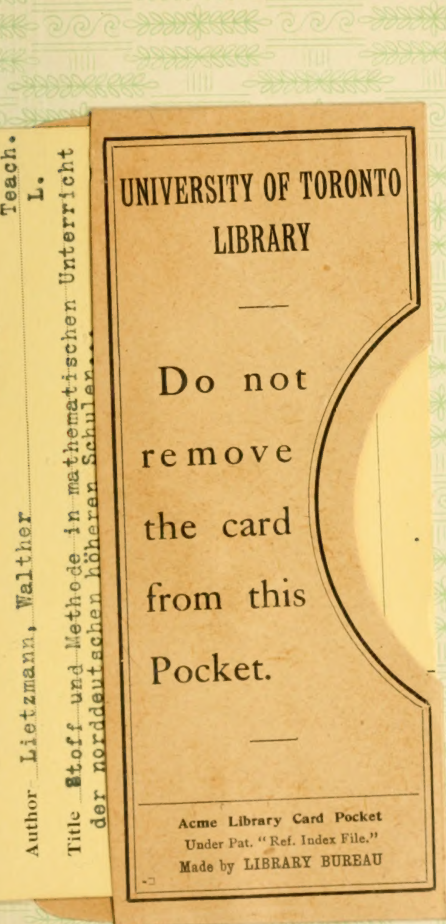
K. J. Volk, Die Elemente der neueren Geometrie. Leipzig. (Teubner.) 1907.

J. Waldvogel, Lösungen der Absolutorial-Aufgaben aus der Mathematik an den humanistischen Gymnasien Bayerns seit dem Jahre 1867. 3. A. München. (E. Pohl.) 1903.

Th. Walter, Algebraische Aufgaben. 1. Bd. Stuttgart. (W. Spemann.) 1889. 2. Bd. Stuttgart. 1891. (Union. Deutsche Verlagsgesellschaft.)
F. Walther, Lehr- und Übungsbuch der Geometrie für Unter- und Mittelstufe. Berlin. (Salle.) 1907.
H. Wehner, Leitfaden für den stereometrischen Unterricht an Realschulen. 2. A. Leipzig. (Teubner.) 1901.
G. Weidenhammer, siehe Böhme.
A. Weill, Sammlung graphischer Aufgaben für den Gebrauch an höheren Schulen. I. Mathematik. Gebweiler. (Boltze.) 1909.
F. Werneburg, siehe Menge.
K. W. Wiecke, Abriß der Elementarmathematik. Frankfurt a./O. (Hoffmann.) 1839.
A. Wiegand, Analytische Geometrie. 7. A. Halle a./S. (H. W. Schmidt.) 1891.
E. Wienecke, Der geometrische Vorkursus in schulgemäßer Darstellung. Leipzig. (Teubner.) 1904.
Th. Wimmenauer, Die Elemente der Mathematik für Gymnasien. 1. Teil: Arithmetik. 2. A. Breslau. (Hirt.) 1892.
A. Witting, siehe Heinr. Müller.
Th. Wittstein, Lehrbuch der Elementar-Mathematik. 1. Bd. 1. Abt. Arithmetik. 9. A. 1895. 2. Abt. Planimetrie. 20. A. 1908. 2. Bd. 1. Abt. Ebene Trigonometrie. 8. A. 1896. 2. Abt. Stereometrie. 9. A. 1897. 3. Bd. 1. Abt. Analysis. 2. A. 1880. 2. Abt. Analytische Geometrie. 2. A. 1886. Hannover. (Hahn.)
– Fünfstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln. 23. A. Ebenda. 1906.
L. Wöckel, Geometrie der Alten. Bearb. von Th. E. Schröder. 14. A. Nürnberg. (F. Korn.) 1901.
H. Wolff, Sätze und Aufgaben der Geometrie für Realanstalten. 1. Teil: Unterstufe. 1908. 2. Teil: Oberstufe. 1909. Leipzig. (Teubner.)
E. Wrobel, Leitfaden der Stereometrie. 3. A. Rostock. (H. Koch.) 1906.
– Übungsbuch zur Arithmetik und Algebra. 1. Teil. 11. A. 1906. 2. Teil. 6. A. 1906. Anhang für höhere realistische Lehranstalten. 4. A. 1906. Ebenda.
P. Zühlke, siehe Lange.
M. Zwerger, siehe Heinr. Müller.






UNIVERSITY OF TORONTO
LIBRARY
Do not
remove
the card
from this
Pocket.
Acme Library Card Pocket
Under Pat. "Ref. Index File."
Made by LIBRARY BUREAU
Educat.
Teach.
L.
132762
Author Lietzmann, Walther
Title Stoff und Methode in mathematischen Unterricht
der norddeutschen höheren Schulen...

